Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 7
Besprechung: 09.06.2017

---

1. Besetsungszahlen in einem Fermi-Gas: (9+5=14 Punkte)

Betrachten Sie ein Fermi-Gas im großkanonischen Ensemble. Die Teilchen sind ununterscheidbar und unabhängig. Wir bezeichnen mit n_λ die Zahl der Teilchen, die sich im Quantenzustand λ befinden.

(a) Beweisen Sie, dass $\langle n_\lambda^2 \rangle = \langle n_\lambda \rangle$ und $\langle n_{\lambda_1} n_{\lambda_2} \rangle = \langle n_{\lambda_1} \rangle \langle n_{\lambda_2} \rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass für die Schwankung der Gesamtteilchenzahl $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$

$$\text{(i)} \quad \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}; \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \to 0 \quad \text{für } T \to 0 \text{ und } \langle N \rangle = \text{konst.}$$

2. Prinzip der maximalen Entropie in einem Quantengas: (5+5+6=16 Punkte)

In dieser Aufgabe wird die Entropie eines idealen Quantengas in einem beliebigen Zustand des Systems (der im Allgemeinen kein Gleichgewichtszustand ist) diskutiert. Dabei soll gezeigt werden, dass die Bose- und Fermi-Verteilungsfunktionen aus dem Prinzip der maximalen Entropie abgeleitet werden können.

Wir betrachten ein Quantengas aus $N \gg 1$ nichtwechselwirkenden Bosonen oder Fermionen. Wir wählen ein Energie-Fenster ΔE, so dass ΔE klein im Vergleich zur Gesamtenergie E des Systems ist. Dann kann man Einteilchen-Zustände λ mit Energien $j\Delta E < \epsilon_\lambda < (j+1)\Delta E$ zur Gruppe j zusammenfassen. Jede Gruppe enthält $\nu_j \gg 1$ Einteilchen-Zustände, die von $N_j \gg 1$ Teilchen besetzt werden. Die Entropie des makroskopischen Zustands ist dann durch die Verteilung auf die einzelnen Gruppen gegeben:

$$S = k_B \sum_j \ln\left[\Gamma_j(N_j)\right]$$

Hier ist $\Gamma_j(N_j)$ die Anzahl der Möglichkeiten N_j Teilchen auf die ν_j Zustände in Gruppe j zu verteilen.

(a) Berechnen Sie $\Gamma_j(N_j)$ und die Entropie für Fermionen. Drücken Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von ν_j und der mittleren Teilchenzahl der Gruppe j, $n_j = N_j/\nu_j$, aus.

(b) Wiederholen Sie die Rechnung aus der Aufgabe (a) für Bosonen.

(c) Bei festgehaltenen E und N benutzen Sie das Prinzip der maximalen Entropie im Gleichgewicht um die Fermi- und Bose-Verteilungsfunktionen zu erhalten.

3. Wärmekapazität des idealen Bose-Gases: (10 Punkte + 10 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein ideales Bose-Gas aus spinlosen Teilchen in D Dimensionen mit chemischem Potential $\mu = 0$.

(a) Bestimmen Sie das Temperaturverhalten der Wärmekapazität c_V für die Dispersionsrelation des Teilchens

$$\varepsilon_{\vec{p}} = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

mit ε_0, p_0 Konstanten und $p = |\vec{p}|$. Die explizite Berechnung des T-unabhängigen Koeffizienten ist nicht gefordert.

(b) **10 Bonuspunkte:**
Betrachten Sie nun die Dispersionsrelation

$$\varepsilon_{\vec{p}} = \Delta + \frac{A}{2p_0^2}\left(p^2 - p_0^2\right)^2,$$

wobei p_0, A und $\Delta \ll A p_0^2$ Konstanten seien. Bestimmen Sie das führende Temperaturverhalten der Wärmekapazität c_V sowohl für $k_B T \ll \Delta$ und $\Delta \ll k_B T \ll A p_0^2$.