Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 9
Besprechung: 23.06.2017

---

1. Ideales Fermi-Gas in zwei Dimensionen: (4+12+12=28 Punkte)

Betrachten Sie ein freies Elektronengas mit der Dispersionsrelation

$$\epsilon_{\vec{p}} = \frac{|\vec{p}\,|^2}{2m} \tag{1}$$

in $D = 2$ räumlichen Dimensionen (ein solches zweidimensionales Elektronengas kann z.B. in Halbleiterstrukturen realisiert werden).

(a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $\nu(\epsilon)$ pro Spinprojektion.

(b) Gegeben sei der Fermi-Impuls p_F. Berechnen Sie die Gesamtteilchenzahl N, die innere Energie U, das großkanonische Potential Ω und den Druck P des Elektronengases im Volumen V bei $T = 0$. Verwenden Sie die erhaltenen Werte von Ω, U und N und überprüfen Sie, dass diese Werte die Beziehung $\Omega = U - TS - \mu N$ erfüllen.

(c) Betrachten Sie nun das freie Elektronengas bei tiefen Temperaturen $T \ll \epsilon_F/k_B$, wobei $\epsilon_F = p_F^2/2m$ die Fermi-Energie des Gases bezeichnet. Mit Hilfe der Sommerfeld-Entwicklung bestimmen Sie das führende Tieftemperaturverhalten des chemischen Potentials $\mu(T)$. Finden Sie dabei die innere Energie $U(T)$ und die Wärmekapazität $c_V(T)$ des Elektronengases in niedrigster nichtverschwindender Ordnung in der Temperatur.

2. Ultrarelativistisches Fermi-Gas: (8+8+6=22 Punkte)

Wir betrachten ein ultrarelativistisches Elektronengas in $D = 3$ räumlichen Dimensionen. Die Energie der Teilchen soll im Folgenden als groß im Vergleich zu mc^2 angenommen werden, wobei m die Masse der Teilchen ist und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. In diesem Fall kann man die lineare Dispersionsrelation verwenden:

$$\epsilon_{\vec{p}} = c|\vec{p}\,|. \tag{2}$$

Bemerkung: Der Einfachheit halber ignorieren wir die thermische Aktivierung von Antiteilchen (d.h. wir betrachten nur die Zustände mit positiver Energie $\epsilon > 0$).

(a) Betrachten Sie das ultrarelativistischen Elektronengas mit dem linearen Spektrum (2) bei $T = 0$. Finden Sie den Fermi-Impuls p_F, die Fermi-Energie ϵ_F, die innere Energie des Systems U und den Druck P in Abhängigkeit von dem Volumen V und der Dichte $n = N/V$.

(b) Für beliebige Temperaturen kann man die thermodynamische Größen durch Integrale über die Fermi-Funktion ausdrücken. Bestimmen Sie auf diesem Weg die innere

Energie $U(T)$ und das großkanonische Potential $\Omega(T)$ (die explizite Berechnung der Integrale über die Fermi-Funktion ist nicht gefordert). Überprüfen Sie außerdem, dass $\Omega = -U/3$ gilt.

(c) Mit Hilfe der Sommerfeld-Entwicklung bestimmen Sie das führende Tieftemperaturverhalten der Entropie $S(T)$ des entarteten ultrarelativistischen Fermi-Gas.

Bonusaufgabe. Elektronen in Graphen: (10 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein ultrarelativistisches Elektronengas mit linearen Dispersionsrelation (2) im zweidimensionalen Volumen V (wie in Aufgabe 2 ignorieren Sie die Zustände mit negativer Energie).

Zeigen Sie, dass für einen adiabatischen Prozess

$$PV^\gamma = \text{konst}, \quad PT^\delta = \text{konst}$$

gilt, wobei P der Druck des Gases bezeichnet und T die Temperatur ist. Bestimmen Sie die Exponenten γ und δ.

Hinweis: Die Bestimmung dieser Exponenten erfordert keine explizite Berechnung von Integralen über die Fermi-Funktion.