Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) **SS 17**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 11
Besprechung: 07.07.2017

---

1. 1D-Ising-Modell für $N = 3$: $(4 + 6 + 8 = 18$ Punkte)

Der Hamilton-Operator eines eindimensionalen Ising-Modells im Magnetfeld B lautet

$$\hat{H} = -J\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\sigma_{i+1} - \gamma B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i, \tag{1}$$

wobei J die Austauschwechselwirkung ist und $\sigma_i = 2s_i^z = \pm 1$ (der erste Spin s_1 und der letzte Spin s_N sind nicht verbunden). In dieser Aufgabe betrachten wir drei Spins ($N = 3$).

(a) Wie sehen die Mikrozustände des Systems aus? Bestimmen Sie die zugehörigen Energien.

(b) Ausgehend vom allgemeinen Ausdruck

$$Z = \mathrm{Tr}\left\{e^{-\hat{H}/(k_B T)}\right\}$$

für die Zustandssumme bestimmen Sie für $B = 0$ die freie Energie $F(T)$, die Entropie S und die Wärmekapazität c_B.

(c) Berechnen Sie nun die Magnetisierung M und die magnetische Suszeptibilität χ im Limes $\gamma B \ll k_B T$.

2. Korrelatoren im Ising-Modell: (12+10+10=32 Punkte)

Im Allgemeinen hat der Hamilton-Operator eines Ising-Modells die Form

$$\hat{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j - \gamma B\sum_i \sigma_i, \tag{2}$$

wobei $\langle ij\rangle$ die Summation über nächste Nachbarn bezeichnet.

(a) Beweisen Sie allgemein, dass die magnetische Suszeptibilität im Ising-Modell die folgende Relation mit dem Spin-Korrelator erfüllt:

$$\chi = \frac{\gamma^2}{k_B T}\left[\sum_{i,j}\langle\sigma_i\sigma_j\rangle - \left\langle\sum_i \sigma_i\right\rangle^2\right]. \tag{3}$$

Überprüfen Sie explizit, dass diese Beziehung im Limes $N \to \infty$ für die aus der Vorlesung bekannten χ und $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle$ gilt.

(b) Analog zur Berechnung von $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle$ in der Vorlesung finden Sie für $B = 0$ die Korrelatoren $\langle\sigma_i\sigma_j\sigma_k\rangle$ und $\langle\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\rangle$ im eindimensionalen Ising-Modell (1) im thermodynamischen Limes $N \to \infty$.

(c) Mit Hilfe der Transfermatrixmethode bestimmen Sie für $N \to \infty$ die Korrelationsfunktion $\langle \sigma_i \sigma_{i+n} \rangle - \langle \sigma_i \rangle^2$ für das eindimensionale Ising-Modell (1) im endlichen Magnetfeld $B > 0$.

3. Unendlich reichweitige Wechselwirkung: (6 + 14 = 20 Punkte)

Betrachten Sie ein Ising-Modell mit unendlicher Reichweite der Wechselwirkung. Jeder Spin $s_i = 1/2$ wechselwirkt mit jedem anderem Spin (und nicht nur mit seinen nächsten Nachbarn):

$$\hat{H} = -\frac{J}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_i \sigma_j - \gamma B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \,. \tag{4}$$

Wichtig ist hierbei, dass die Kopplung J/N mit N^{-1} abnimmt, da die Gesamtenergie extensiv sein muss.

(a) Finden Sie, wie viele Möglichkeiten gibt es, um einen gegebenen Gesamtspin S_{tot} zu bekommen. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z für dieses Modell im Limes $N \gg 1$.

(b) Verwenden Sie die Hubbard-Stratonovich-Transformation

$$e^{\alpha X^2} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \; \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\alpha} + \lambda X\right)$$

um die Zustandssumme als Integral über die Hilfsvariable λ zu schreiben. Berechnen Sie dann die Integrale über λ in der Zustandssumme mit Hilfe der Sattelpunktmethode. Vergleichen Sie die Sattelpunktgleichung mit der Selbstkonsistenzgleichung der Molekularfeldtheorie.