Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 13
Besprechung: 21.07.2017

---

1. Brechung der kontinuierlichen Symmetrie: (4+15+6=25 Punkte)

Betrachten Sie ein D-dimensionales Gitter mit magnetischen Momenten $\vec{\sigma}_i$, die gezwungen sind in einer Ebene zu liegen, $\vec{\sigma}_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y)$. Der Hamilton-Operator des Systems ist (die Summe ist auf nächste Nachbarn im Gitter beschränkt)

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j. \tag{1}$$

Dieser Hamilton-Operator ist invariant bezüglich der simultanen Rotation aller magnetischen Momente in der (x, y)-Ebene. Der Ordnungsparameter des Systems ist ein zweidimensionaler Vektor $\vec{m}(\vec{r}) = \langle \vec{\sigma}_i \rangle$. Bei hohen Temperaturen ist das System in einem paramagnetischen Zustand mit verschwindender mittlerer Magnetisierung. Wenn die Temperatur erniedrigt wird, kann das System in einen ferromagnetischen Zustand übergehen, der die Rotationsinvarianz bricht.

(a) Das Landau-Funktional

$$\mathcal{F}[\vec{m}(\vec{r})] = \int d^D r \left\{ \frac{t}{2}|\vec{m}|^2 + b|\vec{m}|^4 + \frac{K}{2}\left[\left(\vec{\nabla} m_x\right)^2 + \left(\vec{\nabla} m_y\right)^2 \right] \right\},$$
$$\vec{m} = (m_x, m_y), \quad |\vec{m}|^2 = m_x^2 + m_y^2 \quad t = a(T - T_c), \quad a, b, K > 0. \tag{2}$$

wird durch uniforme Konfigurationen des Ordnungsparameters minimiert, $\vec{m}(\vec{r}) =$ konst. Auf Grund der Rotationssymmetrie können wir $\vec{m}(\vec{r}) = (m_0, 0)$ wählen. Zeigen Sie, dass für $T > T_c$ das Landau-Funktional (2) sein Minimum bei $m_0 = 0$ erreicht, während für $T < T_c$ das Minimum bei $m_0 = \sqrt{|t|/4b}$ liegt.

(b) Betrachen Sie nun Fluktuationen des Ordnungsparameters δm_x und δm_y in der symmetriegebrochenen Phase, $T < T_c$. Bestimmen Sie das Landau-Funktional, das kleine Fluktuationen des Ordnungsparameters in der Gauss'schen Näherung beschreibt. Mit Hilfe der Fourier-Entwickung von $\delta m_y(\vec{r})$ (beachten Sie, dass das Feld δm_y reell ist) zeigen Sie, dass die Korrelationsfunktion $\langle \delta m_y(0) \delta m_y(\vec{r}) \rangle$ durch

$$\langle \delta m_y(0) \delta m_y(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{K q^2} \exp(i\,\vec{q} \cdot \vec{r}) \tag{3}$$

gegeben ist. Vergleichen Sie Gl. (3) mit der Korrelationsfunktion der Ordnungsparameterfluktuationen in der skalaren Landau-Theorie, die in der Vorlesung diskutiert wurde.

(c) Analysieren Sie die Konvergenz des Integrals (3) bei kleinen $\vec{q}$ und zeigen Sie, dass die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie in $D \leq 2$ Dimensionen nicht möglich ist (Mermin-Wagner-Theorem).

2. Flüssigkristall: (6+6=12 Punkte + 8 Bonuspunkte)

In dieser Aufgabe diskutieren wir Landau-Theorie für Phasenübergänge erster Ordnung. Flüssigkristalle sind Materialien die aus stabförmigen Molekülen bestehen, die eine (langreichweitige) Ordnung in der Orientierung zeigen können ohne in einem festen Zustand zu sein. Der Ordnungsparameter $\phi = \langle 3\cos^2\theta - 1\rangle$ ist ein Maß für die Ordnung in der Orientierung der Moleküle, die den Winkel θ relativ zu einer bevorzugen Achse einnehmen. Da es (im Gegensatz zum ferromagnetischen Fall) keine Symmetrie $\phi \leftrightarrow -\phi$ gibt, müssen wir im Landau-Funktional für den Ordnungsparameter ϕ den kubischen Term in der Entwicklung mitnehmen:

$$\mathcal{F}[\phi(\vec{r})] = \int d^3r \left[\frac{t}{2}\,\phi^2(\vec{r}) - v\,\phi^3(\vec{r}) + b\,\phi^4(\vec{r}) + \frac{K}{2}\left|\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right|^2\right], \tag{4}$$

wobei $t = a(T - T_0)$ und $a, b, v, K > 0$.

(a) Skizzieren Sie die Freie-Energiedichte als Funktion von ϕ für verschiedene Temperaturen T. Bestimmen Sie die Übergangstemperatur T_c und den Wert von ϕ bei $T = T_c$.

(b) Bei einem Phasenübergang 1. Ordnung ist die Entropie bei der kritischen Temperatur diskontinuierlich. Berechnen Sie die Entropie S für T unmittelbar oberhalb bzw. unterhalb T_c. Bestimmen Sie die latente Wärme $Q_l = T\,\Delta S$ des Phasenübergangs.

(c) Nehmen Sie an, dass das System nur geringfügig unter seiner Übergangstemperatur liegt. Betrachten Sie ein Tröpfchen der Größe L und der Breite der Grenzfläche l_0, mit der geordneten Phase innen und der metastabilen Phase draußen. Bestimmen Sie den kritischen Keimbildungsradius und die Energie eines Keimbildungströpfchens. **(8 Bonuspunkte).**

3. Ferroelektrisches Kristall: (10+10+5=25 Punkte)

In einem ferroelektrischen Kristall entsteht unterhalb einer Übergangstemperatur T_c eine spontane Verzerrung ψ der Einheitszelle, verbunden mit einem Dipolmoment $\vec{P}$. Das Freie-Energiedichte-Funktional für die beiden Ordnungsparameter $\eta = |\vec{P}|$ und ψ lautet

$$f(\eta,\psi) = a\cdot(T - T_0)\,\eta^2 + b\,\eta^4 + c\,\eta^6 + d\,\psi\,\eta^2 + \frac{g}{2}\,\psi^2, \qquad T_0, a, b, c, d, g > 0.$$

(a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtswert $\psi = \psi_G(\eta)$ und damit das Freie-Energiedichte-Funktional $\tilde{f}(\eta) = f(\eta, \psi_G(\eta))$. Skizzieren Sie den Verlauf von $\tilde{f}(\eta)$ für verschiedene Temperaturen T in drei Fällen: $\tilde{b} > 0$, $\tilde{b} = 0$ und $\tilde{b} < 0$, wobei

$$\tilde{b} = b - \frac{d^2}{2g}.$$

Begründen Sie, dass ein Phasenübergang 1. Ordnung auftreten kann.

(b) Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c, bei der dieser Übergang 1. Ordnung stattfindet. Bestimmen Sie näherungsweise $\eta(T)$ und $\psi(T)$ in der Nähe von T_c. Finden Sie die latente Wärme des Übergangs.

(c) Berechnen Sie den kritischen Exponenten β in $\langle\eta\rangle \propto (T_c - T)^\beta$ für den Fall $\tilde{b} = 0$.