Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 14
Besprechung: 28.07.2017

---

1. Master-Gleichung: (10+8=18 Punkte)

Ein Kasten A vom Volumen V sei mit einem viel größeren Kasten B durch ein kleines Loch verbunden. Teilchen können das Loch nur einzeln passieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit Δt ein Gasteilchen von A nach B geht, sei proportional zu $N\Delta t/V$ (N: Zahl der Teilchen in A), und die Wahrscheinlichkeit von B nach A zu gehen sei proportional zu (gleiche Proportionalitätskonstante) $\rho\Delta t$ (ρ: konstante Teilchendichte in B).

(a) Sei $P(N,t)$ die Wahrscheinlichkeit zur Zeit t gerade N Teilchen in A zu finden. Schreiben Sie die Gleichung für $P(N,t)$ (Master-Gleichung) auf und lösen Sie sie für den stationären Fall.

(b) Bestimmen Sie $\langle N(t)\rangle$, indem Sie das erste Moment der Master-Gleichung bilden und die entstehende Differentialgleichung für $\langle N(t=0)\rangle = N_0$ lösen.

2. Master-Gleichung für Besetzungsinversion: (10 Punkte + 10 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein Dreizustandsatom mit Energien $E_1 < E_2 < E_3$. Die Wahrscheinlichkeiten das Atom in diesen Zuständen zu finden werden als $p_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet. Nehmen Sie an, dass ein klassisches elektromagnetisches Feld Übergänge zwischen den Zuständen E_1 and E_3 mit einer Rate Γ antreibt. Desweiteren kann das Niveau E_3 spontan in Zustand E_2 mit einer Rate von γ_{32} zerfallen, während Zustand E_2 mit einer Rate von γ_{21} nach E_1 zerfallen kann.

(a) Geben Sie die Master-Gleichung für $\{p_i\}$ an. Finden Sie die Gleichgewichtslösungen $p_i(t = \infty)$ der Master-Gleichung. Zeigen Sie, dass das Gleichgewicht bei $\gamma_{21} < \Gamma\gamma_{32}/(\Gamma+\gamma_{32})$ durch eine Besetzungsinversion der atomaren Niveaus charakterisiert wird: $p_2(\infty) > p_1(\infty)$. Untersuchen Sie die Gleichgewichtslösungen im Grenzfall $\gamma_{21} \ll \gamma_{32} \ll \Gamma$.

(b) Betrachten Sie nun N unabhängige Drei-Niveau-Systeme in einem Hohlraum (elektromagnetischer Resonator), der eine resonante elektromagnetische Mode mit Frequenz $\omega = E_2 - E_1$ aufweist. Die Photonen im Hohlraum können von den Atomen absorbiert werden (einhergehend mit Übergang $E_1 \to E_2$) und auch einen stimulierten Übergang $E_2 \to E_1$ hervorrufen. Die Übergangsraten für diese Übergänge sind identisch und proportional zur Anzahl der Photonen im Hohlraum, $\gamma_{12} = gn$. Zur Vereinfachung vernachlässigen wir von nun an spontane Übergänge $E_2 \to E_1$. Die Master-Gleichung wird dann durch

$$\dot{p}_1 = gnp_2 + \Gamma p_3 - gnp_1 - \Gamma p_1 \tag{1}$$
$$\dot{p}_2 = gnp_1 + \gamma_{32}p_3 - gnp_2 \tag{2}$$
$$\dot{p}_3 = \Gamma p_1 - \Gamma p_3 - \gamma_{32}p_3 \tag{3}$$

ausgedrückt. Diese Master-Gleichung sollte durch die Gleichung für die Anzahl der Photonen im Hohlraum ergänzt werden. Da alle Übergänge $E_2 \to E_1$ n um 1 erhöhen und Übergänge $E_1 \to E_2$ n um 1 verringern, erhalten wir

$$\dot{n} = gnN(p_2 - p_1) - \kappa n. \tag{4}$$

Der letzte Term in Gleichung (4) beschriebt einen Abfluss von Photonen aus dem Hohlraum in die Außenwelt.

Die Lösungen der Gleichugnen (1), (2), (3) und (4) werden sich dem Gleichgewichtszustand, der durch $p_i(\infty)$ und $n(\infty)$ charakterisiert ist, annähern. Drücken Sie $p_i(\infty)$ durch $n(\infty)$ und Übergangsraten aus. Finden Sie $n(\infty)$ und $p_i(\infty)$ im Limes $\Gamma \to \infty$.

3. Verzögerte Dämpfung: (5+8+15+4=32 Bonuspunkte)

Betrachten Sie das Modell der Quanten-Dissipation mit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + m\int_0^t ds\ K(t-s)\dot{x}(s) = F(t), \tag{5}$$

wobei $F(t)$ eine gegebene Kraft ist. Hier wird die Dämpfung durch einen Dämpfungskern beschrieben:

$$K(t) = \Theta(t)\gamma_0\omega_d e^{-\omega_d t}, \tag{6}$$

wobei $\Theta(t)$ die Heaviside-Funktion ist. Die Anfangsbedingungen sind $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

(a) Finden Sie $x(t)$ im Limes $\omega_d \to \infty$.

(b) Die Bewegungsgleichung (5) kann allgemein mit der Laplace-Transformation gelöst werden. Drücken Sie die Gleichung für die Laplace-Transformation von $x(t)$,

$$\tilde{x}(z) = \int_0^\infty dt\ x(t)e^{-zt},$$

aus.

(c) Die Suszeptibilität $\tilde{\chi}(z)$ wird durch die Relation

$$\tilde{x}_0(z) = \tilde{\chi}(z)\tilde{F}(z),$$

definiert, wobei $\tilde{x}_0(z)$ der Teil von $\tilde{x}(z)$ unabhängig von den Anfangsbedingungen ist. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\chi}(z) = \frac{1}{m}\frac{z+\omega_d}{z(z^2 + z\omega_d + \gamma_0\omega_d)}.$$

Finden Sie die inverse Laplace-Transformation der Suszeptibilität

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dze^{zt}\tilde{\chi}(z), \qquad t > 0, \quad c > 0,$$

unter Verwendung der Konturintegration.

(d) Betrachten wir nun eine konstante Kraft $F(t) = F_0$ für $t > 0$. Finden Sie das Verhalten von $x(t)$ in der Langzeitgrenze $t \to \infty$.