Chemisches Potential eines zweidimensionalen Elektronengases

Berechnen Sie für ein nichtrelativistisches Elektronengas in zwei Dimensionen (Teilchenzahl N, Fläche A, Energien $\epsilon = (\hbar|\boldsymbol{k}|)^2/(2m)$) das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und der Dichte N/A. Diskutieren Sie die Grenzfälle $k_\mathrm{B}T \ll \epsilon_F$ und $k_\mathrm{B}T \gg \epsilon_F$ ($\epsilon_F \equiv \mu(T=0)$). Für welche Temperatur wird $\mu = 0$? Skizzieren Sie $\mu(T)$.

Hinweis: Das Integral $\int_a^b \mathrm{d}x \frac{1}{(e^x+1)}$ kann mit Hilfe der Substitution $e^x = t$ exakt berechnet werden.

Lösung:

2D-Elektronengas aus N-Teilchen in einer Fläche A. Die Energien sind $\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$. Die Fermiverteilung ist

$$n_F(\epsilon_{\boldsymbol{k}}) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}+1}$$

Wir berechnen zunächst großkanonisch die Teilchenzahl N als Funktion von (T, A, μ): (Elektronen: Spin $s = 1/2$)

$$N = (2s+1)A \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} n_F(\epsilon_{\boldsymbol{k}}) = 2A \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{1}{e^{\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}-\mu)}+1}$$

Substituiere

$$z = \beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right), \qquad dz = \frac{\hbar^2}{mk_BT} k\, dk.$$

damit wird der Ausdruck oben zu

$$N = \frac{2Amk_BT}{2\pi\hbar^2} \int_{-\frac{\mu}{k_BT}}^{\infty} \frac{dz}{e^z+1} \ .$$

Das Integral können wir mit der im Hinweis angegebenen Substitution berechnen:

$$e^z = t \quad \longrightarrow \quad \int_a^b \frac{dz}{e^z+1} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{t(t+1)}$$
$$= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) = \ln \frac{t}{t+1}\bigg|_{t_a}^{t_b} = \ln\left(\frac{e^z}{e^z+1}\right)\bigg|_{t_a}^{t_b}$$

Damit

$$N = \frac{2Amk_BT}{2\pi\hbar^2} \ln\left(\frac{e^z}{e^z+1}\right)\bigg|_{-\frac{\mu}{k_BT}}^{\infty} = \frac{Amk_BT}{\pi\hbar^2} \ln\left(1 + e^{\frac{\mu}{k_BT}}\right)$$

Wir lösen nach μ auf:

$$\mu(T) = k_BT \ln\left(e^{\frac{\pi\hbar^2 N}{mk_BTA}} - 1\right) \ .$$

Um die Limites $k_B T \ll \epsilon_F$ und $k_B T \gg \epsilon_F$ zu diskutieren schreiben wir μ als Funktion von ϵ_F. Die Fermienergie ϵ_F können wir aus dem Grenzwert $\epsilon_F = \mu(T \to 0)$ bestimmen (oder wie in Aufgabe 1 in 2 Dimensionen):

$$\epsilon_F = \lim_{T\to 0} k_B T \ln\left(e^{\frac{\pi\hbar^2 N}{m k_B T A}} - 1\right) = \dots \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon_F = \frac{\pi\hbar^2 N}{mA} \; .$$

Einsetzen in (34) liefert die Form

$$\mu(T) = k_B T \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F}{k_B T}} - 1\right) \; .$$

Bei der Nullstelle $\mu = 0$ muss das Argument des Logarithmus gerade gleich 1 sein, die entsprechende Temperatur ist also

$$T_{\mu=0} = \frac{\epsilon_F}{k_B \ln 2}$$

Wir diskutieren noch die Grenzfälle und skizzieren $\mu(T)$:

$$\underline{k_B T \ll \epsilon_F} : \quad \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F}{k_B T}} - 1\right) = \frac{\epsilon_F}{k_B T} + \ln\left(1 - e^{-\frac{\epsilon_F}{k_B T}}\right) \approx \frac{\epsilon_F}{k_B T} - e^{-\frac{\epsilon_F}{k_B T}}$$

$$\mu(T) \approx \epsilon_F - k_B T e^{-\frac{\epsilon_F}{k_B T}} = \epsilon_F - \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\epsilon_F}{k_B T}}\right)$$

$$\underline{k_B T \gg \epsilon_F} : \quad \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F}{k_B T}} - 1\right) \approx \ln\left[\frac{\epsilon_F}{k_B T} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\epsilon_F}{k_B T}\right)^2 + \dots\right]$$

$$\mu(T) \approx -k_B T \ln \frac{k_B T}{\epsilon_F}$$