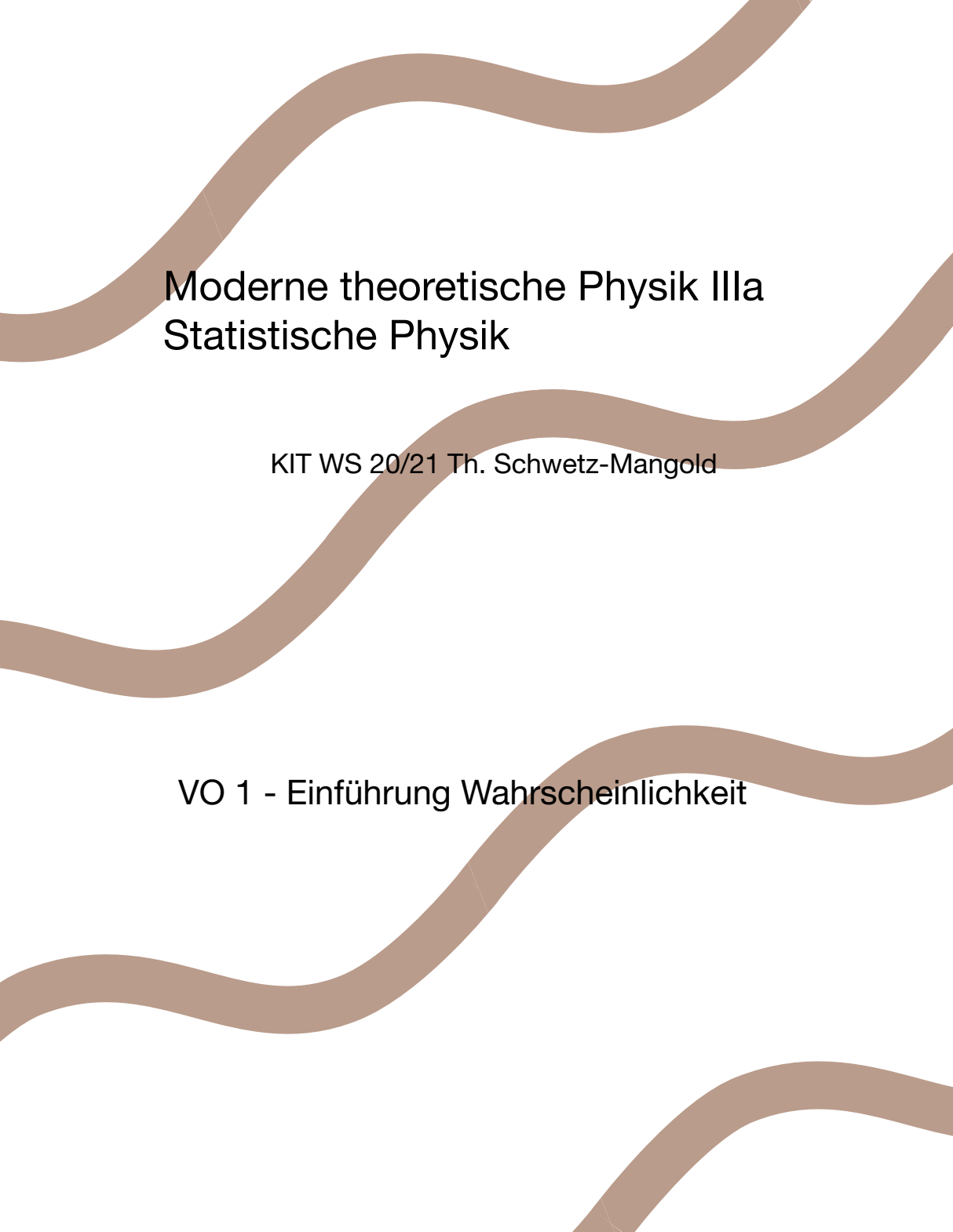


The background of the slide features several thick, wavy, brown lines that flow across the page from left to right, creating a modern, abstract design.

Moderne theoretische Physik IIIa Statistische Physik

KIT WS 20/21 Th. Schwetz-Mangold

VO 1 - Einführung Wahrscheinlichkeit

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

o) Wahrscheinlichkeit, Mittelwert, Schwankung

System mit R sich ausschließenden Zust.

Bsp. Würfel $R = 6$ (diskret)

Ensemble-Mittel: N Versionen d. Systems

N - Würfel

Zeit-Mittel: betr. 1 System „lange Zeit“
 N mal

N mal würfeln (1 Würfel)

Def.: Wahrscheinlichkeit d. Zust. i ($i=1, \dots, R$)

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$$

N_i ... abz. wie oft das Syst. im Zust. i ist

$$\sum_{i=1}^R N_i = N \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^R p_i = 1 \right|$$

Würfel: ideale Würfel $p_i = 1/6$

Festlegung v. $p_i \Leftrightarrow$ Aussage über physikal. Eigenschaften des Syst.

Bsp.: kinet. Energie von Gas-Molekülen ϵ
 $\Delta\epsilon$ Messgenauigkeit

diskrete ϵ -Werte $\epsilon_i = i \Delta\epsilon$

Ensemble-Mittel: messe ϵ von N Molekülen

Zeitmittel: messe ϵ v. einem Mol. sehr oft

kein Molekül ist ausgezeichnet $\Rightarrow$

Ensemble Mittel = Zeitmittel

(wenn d. Zeitintervall zw. Messungen $\gg$
Stoßzeit d. Moleküle)

$$p_i = p(\epsilon_i) = \frac{N_i}{N}$$

für $N \gg 1$, $N_i \gg 1$
Limes $N \rightarrow \infty$ weglassen

Addition, Multiplikation

$$P(i \text{ oder } j) = p_i + p_j \quad (i, j \text{ schließen sich aus})$$

$$N(i \text{ oder } j) = N_i + N_j$$

Wahrsch. ein Syst. 1 in Zust. i und
Syst. 2 in Zust. j

$$P_{ij} = p_i p_j \quad (i, j \text{ unabhängig voneinander})$$

N Syst. 1 in Zust. N_i

M Syst. 2 M_j

inges. $N \cdot M$ Zust., $N_i \cdot M_j$ sind in Zust. ij

$$\Rightarrow p_{ij} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{N_i M_j}{N M} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M_j}{M} = p_i p_j$$

Mittelwert

Systemgröße X : Wert x_i in Zust. i

(Würfel: $x_i = i$, Gas: $x_i = \epsilon_i$)

Mittelwert:

$$\bar{x} \equiv \sum_i p_i x_i = \langle x \rangle$$

↑
„Erwartungswert“

betr. $g(x)$: $\overline{g(x)} = \sum_i p_i g(x_i)$

Abweichungen vom Mittelwert: $x_i - \bar{x}$

$$\overline{x - \bar{x}} = \sum_i p_i (x_i - \bar{x}) = \underbrace{\sum_i p_i x_i}_{\bar{x}} - \bar{x} \underbrace{\sum_i p_i}_1 = 0$$

mittlere quadrat. Abweichung, Schwankung

$$\Delta x \equiv \sqrt{(x - \bar{x})^2} \quad (\Delta x)^2 \dots \text{Varianz}$$

$$\begin{aligned} \underline{(\Delta x)^2} &= \sum_i p_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i p_i x_i^2 - 2\bar{x} \sum_i p_i x_i + \bar{x}^2 = \underline{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \geq 0 \end{aligned}$$

bsp. Würfel: $\bar{x} = \sum_{i=1}^6 p_i x_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i = \frac{7}{2}$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i^2 = \frac{91}{6} \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{91}{6} - \frac{49}{4}} \approx 1.7$$

kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung
Wahrscheinlichkeitsdichte

kontinuierliche Zufallsgröße x

bsp. Energie: E

QM: E diskret

klass. Grenzfall $\rightarrow$ kont.

$$p_i \Delta E \rightarrow p(E) dE$$

allg.: $p(x) dx \dots$ Wahrscheinlichkeit dass
 $x \in [x, x+dx]$

$$\int dx p(x) = 1$$

$$\sum_i p_i \rightarrow \int dx p(x)$$

$\uparrow$ Intervall auf dem x definiert ist

$$\Rightarrow \bar{x} = \int dx x p(x)$$

$\Delta x \dots$ ausweg

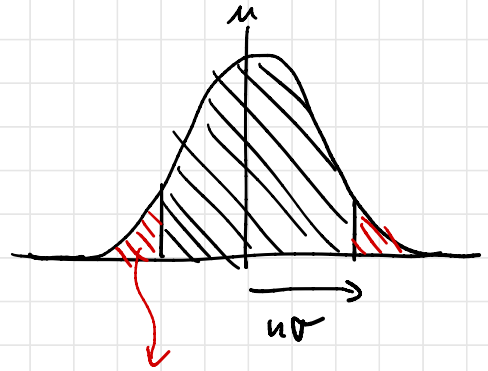
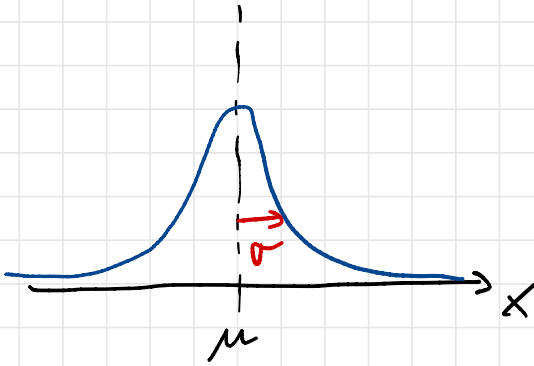
Normalverteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\bar{x} = \mu$$

$$\Delta x = \sigma$$

„Standardabweichung“



$$P_n = \int_{\mu-n\sigma}^{\mu+n\sigma} dx p(x)$$

$$\begin{cases} 0.683 = 1 - 0.32 & n=1 \\ 0.954 = 1 - 4.5\% & n=2 \\ 0.9973 = 1 - 0.27\% & n=3 \\ 1 - 5.7 \times 10^{-7} & n=5 \end{cases}$$



Wahrscheinlichkeit, dass $x \in [\mu - n\sigma, \mu + n\sigma]$

Gesetz der großen Zahl

betrachte N Zufallsgrößen s_i , $i=1, \dots, N$

$$\text{sei } x = \sum_{i=1}^N s_i$$

Wahrscheinlichkeitsdichten $w_i(s_i) ds_i$

Bsp.: „random walk“ mit N Schritten

s_i ... Länge d. i -ten Schritts

x ... Gesamtschritte nach N Schritten

$$\overline{s_i} = \int_{-\infty}^{\infty} ds s w_i(s), \quad (\overline{\Delta s_i})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ds (s - \overline{s_i})^2 w_i(s) \\ = \overline{s_i^2} - \overline{s_i}^2$$

Seien s_i unabhängig voneinander:

$$p(s_1, \dots, s_N) \stackrel{\downarrow}{=} w_1(s_1) \dots w_N(s_N)$$

$$\overline{x} = \int ds_1 w_1(s_1) \dots \int ds_N w_N(s_N) (s_1 + \dots + s_N) \\ = \sum_{i=1}^N \overline{s_i}$$

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= \int \prod_{i=1}^N ds_i w_i(s_i) \left(\underbrace{\sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s}_i)}_{X - \bar{X}} \right)^2 \\ &= \int \prod_i ds_i w_i(s_i) \underbrace{\sum_i (s_i - \bar{s}_i) \sum_j (s_i - \bar{s}_j)}_{\sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s}_i)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (s_i - \bar{s}_i)(s_j - \bar{s}_j)} \end{aligned}$$

relative Schwankung:

"Gesetz d.
großen Zahl"

$$\Rightarrow \bar{x} = N \bar{s}, \quad (\Delta x)^2 = N (\Delta s)^2$$

Bsp.: Gas mit $N = 10^{24}$ Atome

$$\bar{E} \sim T, \quad \Delta E \sim T \Rightarrow \frac{\Delta E}{\bar{E}} = \mathcal{O}(1)$$

Energie eines Atoms sehr ungenau bestimmt
gesamte Energie d. Systems:

$$E = \sum_i \epsilon_i \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} \frac{1}{N} = \mathcal{O}(10^{-12})$$

Gesamtenergie praktisch „exakt“ durch T
festgelegt

Zentrale Grenzwertsatz

Sei $x = \sum_{i=1}^N s_i$ mit N groß: dann folgt
 x einer Normalverteilung mit
 $\mu = \bar{x}$ und $\sigma = \Delta x$

$$\text{mit } \bar{x} = \sum_i \bar{s}_i, \quad (\Delta x)^2 = \sum_i (\Delta s_i)^2$$

gilt. unabh. von $w_i(s_i)$ (mit gewissen
Bed.)

Beweis (Skizze)

$$\text{Def.: } Y_i \equiv S_i - \overline{S_i} \Rightarrow \overline{Y_i} = 0, \quad \Delta Y_i = \Delta S_i = \sqrt{Y_i^2}$$

$$z \equiv \frac{x - \overline{x}}{\Delta x} = \frac{\sum_i S_i - \overline{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_i Y_i$$

$$p(z) = \prod_{i=1}^N \int dS_i w_i(S_i) \underbrace{S\left(z - \frac{\sum_i Y_i}{\Delta x}\right)}_{\frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ik\left(z - \frac{1}{\Delta x} \sum_i Y_i\right)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikz} \prod_{i=1}^N \int dS_i w_i(S_i) \underbrace{e^{i \frac{k}{\Delta x} Y_i}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikz} \prod_{i=1}^N \underbrace{\left(1 + ik \frac{Y_i}{\Delta x} - \frac{k^2}{2} \frac{Y_i^2}{\Delta x^2} + \dots\right)}_{\approx e^{-\frac{k^2}{2} \frac{\Delta S_i^2}{\Delta x^2}} (*)}$$

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikz} e^{-\frac{1}{2} k^2 \frac{1}{\Delta x^2} \sum_i \Delta S_i^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-\frac{1}{2} k^2 - ikz}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta x^2}$

$\Rightarrow$ Fourier-Trf. einer Normalvert. ist wieder eine Normalvert.!

$$-\frac{1}{2} (k^2 + 2ikz) = -\frac{1}{2} (k + iz)^2 - \frac{z^2}{2}$$

$$\Rightarrow p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Rightarrow \text{Normalvert. mit } \bar{z} = 0, \Delta z = 1$$

$$\Rightarrow \text{Variablentrf.: } p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\Delta x} \right)^2}$$

Bem. zu Konvergenz:

$$(*) \quad \left(1 - \frac{k^2}{2} \frac{\Delta S_i^2}{\Delta x^2} + \dots \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{\Delta S_i^2}{\sum_j \Delta S_j^2} \sim \frac{1}{N}$$

$\uparrow$ exakt für alle ΔS_i gleich

-) höhere Terme vernachlässigbar unter Bedingungen an höhere Momente:

$$\overline{y_i^h} = \overline{(S_i - \overline{S_i})^h} \quad \text{und an } \overline{S_i^h}$$

müssen endlich sein und

$$\overline{y_i^{h+1}} \sim \overline{y_i^h} \Delta y_i$$

$\leadsto$ Bedingung an $W_i(S_i)$

-) Normalvert. ist gute Näherung innerhalb einiger ΔX um $\overline{X}$.

Außerhalb sind Normalvert. als auch exakte Verteilung v. X sehr klein

$\Rightarrow$ absolute Fehler ist klein

(i.A. nicht d. relative Fehler)