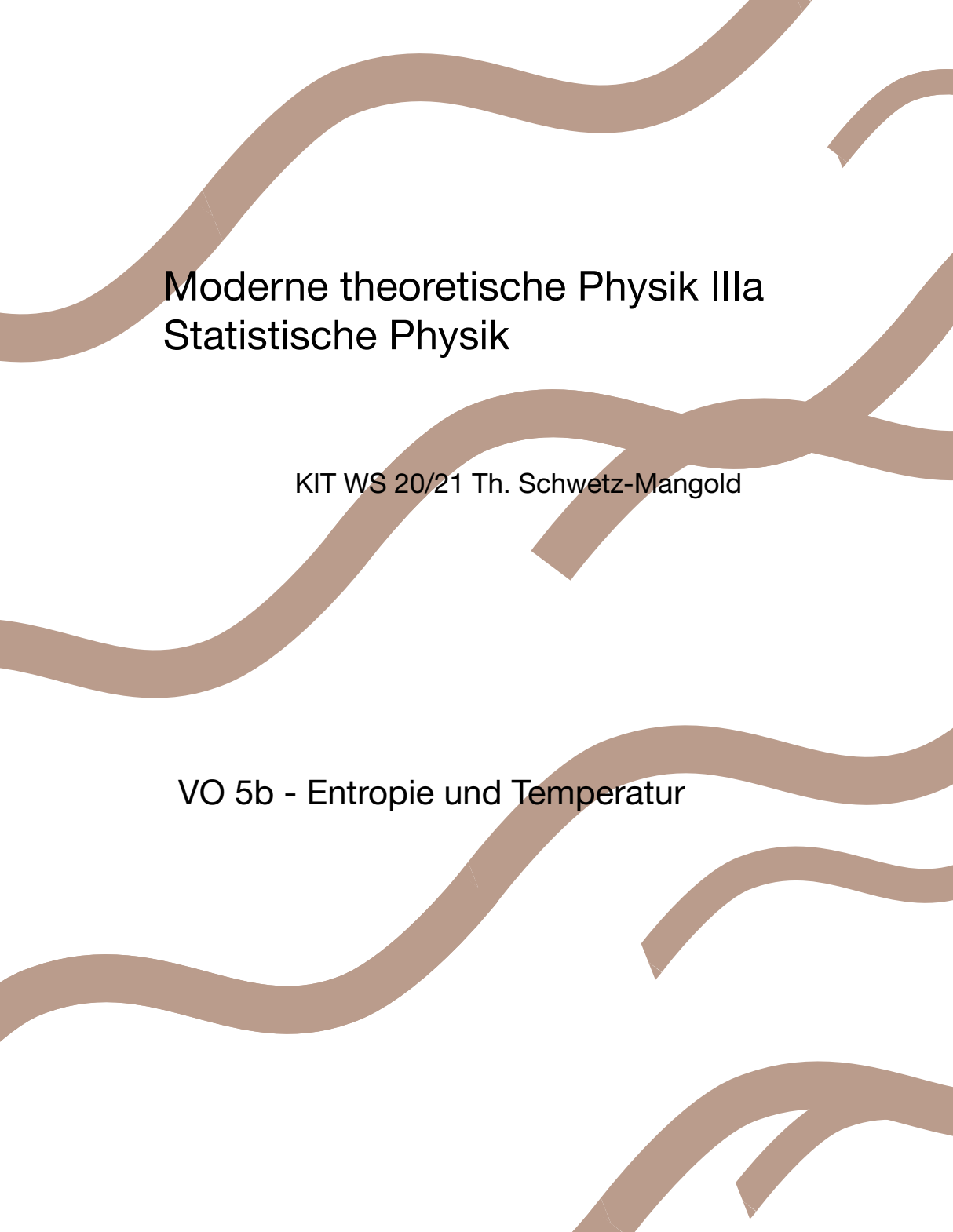




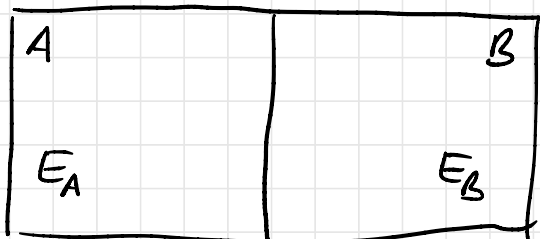
Moderne theoretische Physik IIIa Statistische Physik

KIT WS 20/21 Th. Schwetz-Mangold

VO 5b - Entropie und Temperatur

Entropie und Temperatur

betrachte 2 makroskop. Systeme in
thermischen Kontakt



- 2 Gasvolumina
- Milchkaffe in Kühlschrank

Gesamtsystem $A+B$ sei abgeschlossen

$$E = E_A + E_B = \text{const}$$

Wie teilen sich E_A und E_B auf, wenn
das Syst. im Gleichgewicht ist?

verwende FP:

Anzahl. d. Zust. in A: $\Omega(E_A)$

$$\Omega_A(E_A) = \{ \Omega \in I(E_A) \}$$

$[E_A - \Delta E, E_A]$

Anzahl d. Zust. in B:

$$\Omega_B(E_B) = \{n \in I(E_B)\} = \Omega_B(E - E_A)$$

Anzahl d. Gesamtzust. mit $E_A =$

$$\Omega_A(E_A) \cdot \Omega_B(E - E_A)$$

Anz. aller mögl. Zust. $\Omega(E) = \sum_{E_A} \Omega_A(E_A) \Omega_B(E_B)$

Wahrscheinlichkeit die Energieaufteilung

$E_A, E_B = E - E_A$ zu finden:

$$W(E_A) = \frac{\Omega_A(E_A) \Omega_B(E - E_A)}{\Omega(E)}$$

i. Allg.: $\Omega(E)$ extrem stark steigende

Funktion der Energie

ideales Gas: $\Omega \propto E^{\frac{3N}{2}}$, $\Omega \propto E^{\gamma f}$

$\gamma \sim O(1)$, $f \dots$ Anz. d. Freiheitsgrade

$\Omega_A(E_A) \dots$ stark steigend in E_A

$\Omega_B(E-E_A) \dots$ stark fallend in E_A

$\Rightarrow \Omega_A(E_A) \Omega_B(E-E_A) \dots$ ausgeprägtes Maximum

$$\ln W(E_A) = \ln \Omega_A(E_A) + \ln \Omega_B(E-E_A) - \ln \Omega(E)$$

Maximum bei

$$\frac{\partial \ln \Omega_A(E_A)}{\partial E_A} + \frac{\partial \ln \Omega_B(E-E_A)}{\partial E_A} = 0$$

$$\frac{\partial \ln \Omega_A(E_A)}{\partial E_A} = - \frac{\partial \ln \Omega_B(E-E_A)}{\partial E_A} \quad (*)$$

Def.:

Entropie: $S(E, Y) \equiv k \ln \Omega(E, Y)$

Temperatur: $\frac{1}{T} \equiv \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_Y$

$k \dots$ Boltzmannkonstante (willkürlich)

(*) $\Rightarrow$ zwei makroskopische Syst.
im therm. Gleichgew. haben die
gleiche Temperatur. („0. HS“)

wenn $T_A \neq T_B \Rightarrow$ Wärmeaustausch
solange bis $T_A = T_B$

sei $\Omega = c E^{\gamma f}$

Ann.: $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$

$$\ln W(E_A) = \gamma f_A \ln E_A + \gamma f_B \ln E_B + \text{const}$$

$$\frac{\partial \ln W(E_A)}{\partial E_A} = 0 \Rightarrow \frac{\bar{E}_A}{f_A} = \frac{E - \bar{E}_A}{f_B} = \frac{\bar{E}_B}{f_B}$$

$\rightarrow$ Energie pro Freiheitsgrad ist gleich!

Entwickle $\ln W(E_A)$ um Maximum $\bar{E}_A$

$$\ln W(E_A) = \ln W(\bar{E}_A) - \frac{(E_A - \bar{E}_A)^2}{2 \Delta E_A^2}$$

$$\frac{1}{\Delta E_A^2} = - \left(\frac{\partial^2 \ln W}{\partial E_A^2} \right)_{\bar{E}_A} = \frac{\gamma f_A}{\bar{E}_A^2} + \frac{\gamma f_B}{\bar{E}_B^2}$$

$$W(E_A) = W(\bar{E}_A) \cdot \exp\left(-\frac{(E_A - \bar{E}_A)^2}{2 \Delta E_A^2}\right)$$

$\bar{E}_A$... Maximum $\hat{=}$ Mittelwert

$$\frac{\Delta E_A}{\bar{E}_A} \sim \frac{1}{\sqrt{f_A}} \dots \text{„Gesetz d. großen Zahl“}$$

$$\text{für } f_A \sim 10^{24} \Rightarrow \frac{\Delta E_A}{\bar{E}_A} \sim 10^{-12}$$

für makroskop. Syst. liegen praktisch alle Zustände sehr nahe beim Maximum

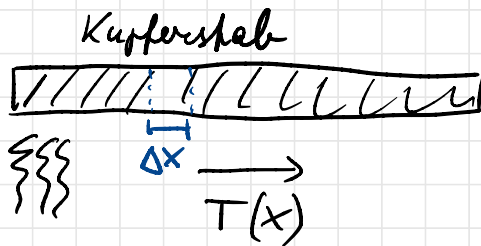
FP $\Rightarrow$ Gleichgew. $\hat{=}$ $W(E_A)$... maximal

$$S(E_A) = S_A(E_A) + S_B(E - E_A) \rightarrow \text{maximal}$$

2. HS

Bem.:

- 1) Entropie und Temperatur nur im Gleichgewicht definiert!
zumindest lokales Gleichgew. notwendig



•) Temperatur =
gradient in
Kupferstab

-) Ortsabhängige Temperatur in Atmosphäre

- 2) S und T sind makroskopische
Größen (messbar), durch
mikroskopische Interpätat. verknüpft
 $S = k \ln \Omega$ (Boltzmann 1877)

3) Entropie ist additiv: $\Omega = \Omega_A \Omega_B$

$$\Rightarrow S = k \ln \Omega = S_A + S_B$$

z.B.: sein A, B isoliert mit $T_A \neq T_B$

T für Gesamtsyst. existiert nicht

aber kann $S = S_A + S_B$ betrachten

nach Wärmeaustausch u. Herstellung

d. Gesamtgleichgew.: $S = S_A + S_B \rightarrow \max.$

$$\Rightarrow T = T_A = T_B$$

$$\Omega(E) \propto E^{\gamma f} \Rightarrow S = k \gamma f \ln E + \text{const}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k \gamma f}{E} > 0 \quad (*) \quad (\gamma > 0)$$

$$\frac{\partial T}{\partial E} = \frac{1}{k \gamma f} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T > 0, \frac{\partial T}{\partial E} > 0}$$

(*) $kT \equiv \frac{1}{\beta} = \frac{E}{\gamma f} \dots$ Energie pro Freiheitsgrad!

$\Rightarrow [k] = [\text{Energie}] / [\text{Temperatur}]$

k legt Einheit der Temp. fest

Bsp.: ideales Gas: $kT = \frac{2}{3} \frac{E}{N}$

klass. Stat. pr.: $\frac{E}{N} = \frac{m}{2} \overline{v^2}$ mittl. kin. Teilchenenergie

$\overline{v^2} \geq 0, E \geq 0 \Rightarrow T \geq 0$

$T=0 \dots$ absolute Nullpunkt

genauer: QM: Systeme haben Grundzust. mit wohldefinierter Energie $E_0 \Rightarrow$ minimale Energie, die Syst. annehmen kann $E \geq E_0$
 $\Omega \propto E^{\gamma f} \rightarrow (E - E_0)^{\gamma f}$

oft Grundzust. eindeutig:

$$\Omega(E_0) = 1$$

$$\Rightarrow S(E_0) = k \ln \Omega(E_0) = 0$$

$$\rightarrow E \rightarrow E_0 \hat{=} T \rightarrow 0 \quad \text{bzw.}$$

$$S \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad T \rightarrow 0$$

$$3. \text{ HS}$$

Ausnahme: Syst. mit Spin:
für praktische erreichbare Temp.
sind Spin-Zust. entartet

$$\Rightarrow \text{z.B.: für Spin-}\frac{1}{2} \text{ Kerne: } \Omega_0 = 2^N$$

$$S_0 = S(T \rightarrow 0) \approx N k \ln 2$$

$$S \rightarrow S_0 \quad \text{für} \quad T \rightarrow 0$$

$$3. \text{ HS'}$$

S_0 u.a. von Energie od. äußeren Param.

theoretisch auch $S_0 \rightarrow 0$, wenn T klein
genug, z.B. durch Restwechselw. d. Kerne