

Mod. theor. Physik IIIa (Theo Fa), WS20/21: Klausur 1

Donnerstag 04. März 2021

Bearbeitungszeit: 90min
Gesamtpunkteanzahl: 100 Punkte

Formelsammlung

- Differenzial der inneren Energie: $dE = TdS - PdV + \mu dN$
- Thermodynamische Potentiale:

$$\begin{aligned}F &= E - TS \\H &= E + PV \\G &= E - TS + PV \\J &= E - TS - \mu N\end{aligned}$$

- Wärmekapazitäten:

$$C_X = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_X = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_X$$

- Partielle Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_f = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y}$$

- Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Stirlings Formel: $\ln(n!) \approx n \ln n - n \approx n \ln n$ für $n \gg 1$
- Definition Dichteoperator:

$$\hat{\rho} = \sum_r P_r |\Psi_r\rangle \langle \Psi_r|, \quad P_r \geq 0, \quad \sum_r P_r = 1$$

Kurzfragen

[25 Punkte]

1. Wir betrachten den Operator

$$\hat{\rho} = \alpha |a\rangle \langle a| + \beta |a\rangle \langle b| + \beta^* |b\rangle \langle a| + \alpha |b\rangle \langle b| . \quad (1)$$

Die Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ bilden ein Orthonormalsystem; α und β sind komplexe Zahlen.

- (i) Welche Eigenschaften müssen α und β erfüllen, dass $\hat{\rho}$ ein Dichteoperator ist?
- (ii) Welche Eigenschaften müssen α und β erfüllen, damit $\hat{\rho}$ einen reinen Zustand beschreibt.

[10 Punkte]

2. Die Sackur-Tetrode Gleichung $S_{\text{Sack.-Tetr.}}(E, N, V)$ beschreibt die Entropie eines idealen Gases. Ein Gas besteht nun aus einer idealen Mischung zwei Teilchenarten A und B (beides ebenfalls ideale Gase). Ein Student behauptet dass die Entropie dann laut der Sackur-Tetrode Gleichung durch

$$S_{\text{Sack.-Tetr.}}(E_{\text{gesamt}}, N_{\text{gesamt}}, V_{\text{gesamt}}) \quad (2)$$

gegeben ist, wobei $Y_{\text{gesamt}} = Y_A + Y_B$ für $Y = E, N, V$. Ist die Aussage richtig oder falsch? Warum?

[4 Punkte]

3. Was ist die verallgemeinerte Kraft zu einem äußeren Parameter Y_i ? [2 Punkte]
4. Betrachte den Zusammenhang zwischen freier Energie $F(T, V, N)$ und innere Energie $E(S, V, N)$. Erkläre, warum F und E von unterschiedlichen Parameter abhängen (das heißt T gegenüber S). [3 Punkte]

[3 Punkte]

5. Betrachtet das totale Differential $dF = GdX + HdY$. Erkläre warum

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \frac{\partial H}{\partial X}. \quad (3)$$

[3 Punkte]

6. Welche unterschiedlichen physikalische Systeme beschreibt das mikrokanonische, das kanonische und das großkanonische Ensemble? [3 Punkte]

[3 Punkte]

Frage 1: Carnot-Prozess mit van der Waals Gas

[30 Punkte]

Wir betrachten den Carnot-Kreislauf mit folgenden Prozessschritten:

- 1: $(P_1, V_1, T_1) \rightarrow (P_2, V_2, T_2)$: isotherme Expansion ($dT = 0$),
- 2: $(P_2, V_2, T_2) \rightarrow (P_3, V_3, T_3)$: adiabatische Expansion ($dQ = 0$),
- 3: $(P_3, V_3, T_3) \rightarrow (P_4, V_4, T_4)$: isotherme Kompression,
- 4: $(P_4, V_4, T_4) \rightarrow (P_1, V_1, T_1)$: adiabatische Kompression.

Als Arbeitssubstanz nehmen wir ein van der Waals Gas an, mit der Zustandsgleichung

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \quad (4)$$

Allgemein gilt dann, dass die Wärmekapazität C_V unabhängig vom Volumen V ist. Zusätzlich nehmen wir an, dass C_V auch unabhängig von der Temperatur T sei, also eine Konstante ist. Weiter soll zur Vereinfachung angenommen werden, dass die Stoffmenge während des Kreisprozesses konstant bleibt.

- (a) Skizziere das PV -Diagramm des Prozesses.

[5 Punkte]

- (b) Verwende die allgemeine Beziehung

$$dE = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV \quad (5)$$

in Kombination mit Gl. (4), um einen Ausdruck für die Änderung der Wärme zu finden, mit $\delta Q = dE + PdV$.

[5 Punkte]

- (c) Zeige damit dass eine Adiabate durch

$$T^\alpha (V - b) = \text{const.} \quad \text{mit} \quad \alpha = C_V/R \quad (6)$$

beschrieben wird.

[5 Punkte]

- (d) Betrachte nun den Carnot-Kreislauf. Berechne den Wärmeübertrag entlang der beiden Isothermen unter Verwendung des Ergebnisses für δQ aus (b).

[5 Punkte]

- (e) Gib die allgemeine Definition des Wirkungsgrades einer Wärmekraftmaschine an. Verwende dann die Ergebnisse aus (c) und (d) um den Wirkungsgrad für die Carnot-Maschine mit einem van der Waals Gas zu berechnen. Vergleiche das Ergebnis mit dem Fall eines idealen Gases.

[10 Punkte]

Frage 2: Kanonische Zustandssumme

[20 Punkte]

Wir betrachten die kanonische Zustandssumme $Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$, wobei $1/\beta \equiv k_B T$. Die Mikrozustände r des Systems haben die Energien E_r .

(a) Zeige

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{und} \quad \langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}. \quad (7)$$

[5 Punkte]

(b) Zeige folgende Beziehung zwischen der Wärmekapazität C_V und der Schwankung der Energie σ_E :

$$\sigma_E = k_B T \sqrt{C_V / k_B}, \quad \text{wobei} \quad C_V \equiv \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{N,V}. \quad (8)$$

[5 Punkte]

(c) Wie verhält sich die relative Schwankung der Energie, also $\sigma_E / \langle E \rangle$, in Abhängigkeit der Teilchenzahl N ? Gib das qualitative Verhalten an und begründe das Ergebnis. Hinweis: Verwende das Verhalten von extensiven bzw. intensiven Größen bezüglich N .

[5 Punkte]

(d) Wir betrachten ein System im thermodynamischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad bei Temperatur T . Nun betrachten wir den Fall, dass Energieniveaus entartet sind. Eine gegebene Energie $E^{(\alpha)}$ sei $\Omega^{(\alpha)}$ -fach entartet, d.h., es gibt $\Omega^{(\alpha)}$ Mikrozustände, die alle die gleiche Energie $E^{(\alpha)}$ haben. Ausgehend von der Wahrscheinlichkeitsverteilung des kanonischen Ensembles zeige, dass die Wahrscheinlichkeit das System im Energieniveau $E^{(\alpha)}$ zu finden durch

$$\mathcal{P}(E^{(\alpha)}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta F^{(\alpha)}} \quad (9)$$

gegeben ist, wobei wir die freie Energie des Niveaus α definieren durch $F^{(\alpha)} = E^{(\alpha)} - TS^{(\alpha)}$.

[5 Punkte]

Frage 3: Das 1-dimensionale Ising-Modell

[25 Punkte]

Wir betrachten ein einfaches Modell für einen Ferromagneten, das sogenannte 1-dimensionale Ising-Modell. Das Modell besteht aus einer 1-dimensionalen Spin-Kette mit $N + 1$ Spins $s_i = \pm 1$, wobei $i \in \{1, \dots, N + 1\}$. Benachbarte Spins treten in Wechselwirkung miteinander. Es gebe kein externes magnetisches Feld. Dann ist die Energie

$$E = -\epsilon \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} \equiv -\epsilon n. \quad (10)$$

Die Konstante ϵ beschreibt die Stärke der Wechselwirkung.

- (a) Wir definieren die Variablen $\sigma_i = s_i s_{i+1}$. Diese bestimmen, ob Nachbarspins parallel oder antiparallel sind. Betrachte nun die Anzahl n_+ und n_- der positiven bzw. negativen σ_i 's. Verwende den Zusammenhang zwischen n_+, n_- und n aus Gl. (10) und zeige, dass die Anzahl aller Mikrozustände gegeben ist durch

$$\Omega(E, N) = 2 \binom{N}{\frac{N-n}{2}}. \quad (11)$$

[6 Punkte]

- (b) Zeige dass für die Entropie gilt:

$$S/k_B \approx -\frac{N}{2} [(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x)] + (N+1) \ln 2, \quad (12)$$

wobei $x \equiv n/N$. Hinweis: verwende $N, n \gg 1$.

[8 Punkte]

- (c) Unter Verwendung von Gl. (12) leite den folgenden Zusammenhang zwischen n und T her

$$n = N \tanh \frac{\epsilon}{k_B T}. \quad (13)$$

Hinweis: verwende die Identität

$$2 \operatorname{artanh}(y) = \ln \frac{1+y}{1-y}. \quad (14)$$

[5 Punkte]

- (d) Betrachte das Verhalten der Energie E im Limes $T \rightarrow \infty$ und $T \rightarrow 0$. Was bedeutet das Ergebnis für die Orientierung der Spins in diesen beiden Fällen?

[6 Punkte]