

Klausur: Moderne Theoretische Physik IIIa WS 2021/2022

Prof. Dr. A. D. Mirlin

Dr. E. V. H. Doggen, P. Pöpperl

Hauptklausur

17.2.2022

1. Durchmischung eines Gases

(20 Punkte)

Ein abgeschlossenes, isoliertes, dreidimensionales Volumen wird aufgeteilt in zwei Kammern mit den Volumina V_1, V_2 . In jeder Kammer befinden sich N Atome desselben gleichen, einatomigen idealen Maxwell-Boltzmann Gases. In den Kammern herrschen die Temperaturen T_1 bzw. T_2 ($T_1 \neq T_2$), und der Druck $P_1 = P_2$. Die Aufteilung wird jetzt entfernt.

Gegeben ist in dieser Aufgabe die Gleichung für die Entropie S :

$$S = Nk_B \ln \left[\frac{V}{N\lambda_T^3} \right] + \frac{5}{2}Nk_B. \quad (1)$$

wobei $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ die de Broglie-Wellenlänge ist.

- (a) Wann macht es physikalisch Sinn diese Formel für S (1) zu benutzen? (3 Pkt)
- (b) Berechnen Sie die Endtemperatur T_f , wenn wieder Gleichgewicht erreicht ist. Begründen Sie Ihren Rechenweg. (6 Pkt)
- (c) Berechnen Sie die Entropieänderung ΔS , als Funktion von Teilchenzahl N und Temperaturen T_1, T_2 . (8 Pkt)
- (d) Wie groß ist ΔS im Fall, dass $T_1 = T_2$? Warum ist das so? (3 Pkt)

2. Ionen im Magnetfeld

(20 Punkte)

Gegeben seien N Ionen in einem Gitter mit Spin-1 und magnetischem Moment μ_0 . Es gibt ein Magnetfeld $\vec{B} = B\hat{e}_z$ (mit konstantem B und Einheitsvektor in die z -Richtung $\hat{e}_z$) und die Temperatur ist T . Die Ionen sind identisch und wechselwirken nicht. Sie sitzen fest auf Gitterplätzen, sodass die kinetische Energie der Ionen vernachlässigt werden kann. Der Hamiltonian eines Ions lautet

$$H = -\mu_0 \vec{B} \cdot \vec{s} \quad (2)$$

wobei $\vec{s}$ der Spin-Operator ist.

- (a) Begründen Sie ob hier in der kanonischen Zustandssumme $Z(T, N)$ eine Faktor $N!$ notwendig ist, und berechnen Sie $Z(T, N)$, (4 Pkt)
- (b) die Freie Energie $F(T, N)$, (4 Pkt)
- (c) die Entropie $S(T, N)$, (4 Pkt)
- (d) und die innere Energie $U(T, N)$. (4 Pkt)

- (c) Das externe Magnetfeld wird jetzt reduziert. Nehmen Sie an, dass dieser Prozess adiabatisch ist. Was passiert mit der Entropie und Temperatur? (4 Pkt)

3. Spins im mikrokanonischen Ensemble (30 Punkte)

Ein Gitter aus N Spins-1/2 im Magnetfeld habe die Energie

$$E = -(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})\mu_B B \quad (3)$$

mit $B > 0$. Hierbei sind $N_{\uparrow}$ und $N_{\downarrow}$ die Anzahlen der Spins parallel und antiparallel zum Magnetfeld, $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$.

- (a) Finden Sie die mikrokanonische Zustandssumme $\mathcal{N}(E, N)$, sowie einen Ausdruck für die Entropie $S(E, N)$.

Hinweis: Die Energie ist diskret. Die Mikrokanonische Zustandssumme $\mathcal{N}(E, N)$ ist also die Anzahl an Zuständen mit Energie E und Teilchenzahl N . (8 Pkt)

- (b) Zeigen Sie, dass die Entropie $S(E, N)$ im Limit $N, N_{\uparrow}, N_{\downarrow} \gg 1$ gegeben ist durch

$$S(E, N) \approx k_B \left[\frac{N - \frac{E}{\mu_B B}}{2} \log \left(\frac{2N}{N - \frac{E}{\mu_B B}} \right) + \frac{N + \frac{E}{\mu_B B}}{2} \log \left(\frac{2N}{N + \frac{E}{\mu_B B}} \right) \right] \quad (4)$$

Hinweis: Finden Sie zunächst die Entropie als Funktion von $N, N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$ für $N, N_{\uparrow}, N_{\downarrow} \gg 1$ und drücken Sie dann $N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$ durch N und E aus, um die Näherung für $S(E, N)$ zu erhalten. (10 Pkt)

- (c) Zeigen Sie im Allgemeinen

$$\frac{1}{T(E, N)} = \frac{\partial S(E, N)}{\partial E} \quad (5)$$

ausgehend vom Ausdruck für die Temperatur

$$T(E, N) = \frac{\partial E(S, N)}{\partial S} \quad (6)$$

Hierbei sollen Sie die Temperatur nicht explizit berechnen. (3 Pkt)

- (d) Berechnen Sie die Temperatur $T(E, N)$ aus dem genäherten Ausdruck für die Entropie (4). (6 Pkt)
- (e) Normalerweise (im thermodynamischen Gleichgewicht) sind Zustände niedrigerer Energie stärker besetzt als Zustände höherer Energie. Welche Bedingung gilt dann für die Besetzungszahlen der Mikrozustände $N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$? Nehmen Sie an, es gäbe ein System in dem diese Bedingung verletzt wäre. Was würde für die Temperatur in diesem System gelten, wenn man sie trotzdem mit der Formel aus der vorangegangenen Teilaufgabe berechnen würde? Was muss im Allgemeinen für die Anzahl der Zustände $\mathcal{N}(E, N)$ als Funktion der Energie gelten, dass so eine Besonderheit auftreten kann? (3 Pkt)

4. Hohlraumstrahlung in zwei räumlichen Dimensionen (30 Punkte)

Ein zweidimensionales, kubisches Volumen $V = L^2$ enthält Photonen im thermodynamischen Gleichgewicht, wobei die Wände eine Temperatur T haben. Nur stehende Wellen sind erlaubt, mit Energien:

$$E_i = \hbar\omega_i = \hbar ck_i, \quad (7)$$

mit Frequenz ω_i und Wellenvektor k_i .

- (a) Warum ist das richtige Ensemble das Großkanonische Ensemble in dieser Situation? Finden Sie die Ausdrücke für großkanonische Zustandssumme Z_G und großkanonisches Potential Ω . (5 Pkt)
- (b) Bestimmen Sie die Zustandsdichte $\nu(\omega)$. Berücksichtigen Sie, dass es zwei transversale Moden gibt. (8 Pkt)
- (c) Mit Hilfe der Zustandsdichte, zeigen Sie, dass für das großkanonische Potential gilt

$$\Omega(T, V) = \frac{k_B T V}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \omega \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}). \quad (8)$$

Zeigen Sie, dass der folgende Zusammenhang zwischen Druck $P(T, V)$ und Temperatur T gilt:

$$P(T, V) = f(V) T^\alpha \quad (9)$$

$f(V)$ ist nicht von der Temperatur abhängig. Bestimmen Sie α .

Hinweis: Da Sie $f(V)$ nicht explizit bestimmen müssen, muss das Integral nicht gelöst werden. (10 Pkt)

- (d) Mit Hilfe der Zustandsdichte, finden Sie einen Ausdruck für die innere Energie als Funktion von Temperatur und Volumen $U(T, V)$. Zeigen Sie damit, dass für die inneren Energie gilt

$$U(T, V) = g(V) T^\delta \quad (10)$$

und für die Wärmekapazität

$$c_V(T, V) = h(V) T^\gamma. \quad (11)$$

$g(V)$ und $h(V)$ sind nicht von der Temperatur abhängig.

Bestimmen Sie δ und γ .

Hinweis: Da Sie $g(V)$ und $h(V)$ nicht explizit bestimmen müssen, muss das Integral nicht gelöst werden. (7 Pkt)