

Klausur: Moderne Theoretische Physik IIIa WS 2021/2022**Prof. Dr. A. D. Mirlin****Nachklausur****Dr. E. V. H. Doggen, P. Pöpperl****04.04.2022****1. Dichtematrix für Spins-1/2****(6 + 4 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)**

N Spin-1/2-Atome befinden sich in einer Mischung: Ein Anteil von 60% befindet sich im $S_z = +\hbar/2$ Eigenzustand des $\hat{S}_z$ -Operators, und ein Anteil von 40% im $S_x = -\hbar/2$ Eigenzustand des $\hat{S}_x$ -Operators. Die Matrizen für die S_x, S_y, S_z -Operatoren in der S_z -Basis sind gegeben durch:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Für die gegebene Mischung sind die Komponenten der Dichtematrix in dieser Basis gegeben durch:

$$\rho = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- (a) Welche essentielle Eigenschaften muss eine Dichtematrix haben? Zeigen Sie, dass die gegebene Dichtematrix (2) alle diese Bedingungen erfüllt. **(6 Pkt)**

Lösung: Spur ist 1:

$$\text{Tr}\rho = 4/5 + 1/5 = 1. \quad (3)$$

ρ ist hermitesch: die diagonalen Werte sind real, und $-1/5^* = -1/5$.

ρ ist positiv semidefinit. Das kann man zeigen, z.B. durch die Lösung von $\det(\rho - \lambda I)$.

ρ hat nur Eigenwerte ≥ 0 :

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{10}. \quad (4)$$

(6 Pkt) für alle Bedingungen, **(3 Pkt)** für 2 korrekte Bedingungen, **(1 Pkt)** für nur ein Bedingung.

- (b) Welche Eigenschaft gilt für eine Dichtematrix, die einen gemischten Zustand beschreibt? Zeigen Sie, dass die gegebene Dichtematrix tatsächlich eine Mischung beschreibt. **(4 Pkt)**

Lösung: Für einen reinen Zustand ist genau ein Eigenwert 1, und die weiteren 0. Das ist hier nicht der Fall, siehe Teil a). **(4 Pkt)** für analoge Berechnung aus Teil a), **oder:**

Alternativ: für eine Mischung: $\rho^2 \neq \rho$. **(2 Pkt)** Hier:

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 17/25 & -1/5 \\ -1/5 & 2/25 \end{pmatrix} \neq \rho. \quad (5)$$

(2 Pkt)

- (c) Wie hoch muss der Anteil im S_z -Eigenzustand sein, damit wir einen reinen Zustand bekommen? Was sind die korrespondierenden Dichtematrizen? (5 Pkt)

Lösung: Für einen reinen Zustand, muss der Anteil 100% oder 0% sein (2 Pkt). Für 100% (natürlich der einfachste Fall in der S^z -Basis) bekommen wir die Dichtematrix:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho^2, \quad (6)$$

mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$ (1 Pkt). Für 0% ist die Dichtematrix:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \rho^2, \quad (7)$$

mit den gleichen Eigenwerten (2 Pkt).

- (d) Finden Sie die Eigenvektoren von $\hat{S}_z$ und $\hat{S}_x$ in der S_z -Basis. Drücken Sie in dieser Basis die Eigenvektoren von $\hat{S}_x$ durch die Eigenvektoren von $\hat{S}_z$ aus. Für beliebige Anteile α ($0 \leq \alpha \leq 1$) und $\beta = 1 - \alpha$ der S_z -Teilchen im $S_z = +\hbar/2$ bzw. S_x -Teilchen im $S_x = -\hbar/2$ Zustand, finden Sie die Dichtematrix in der S_z -Basis. (5 Pkt)

Lösung: Eigenvektoren von S_z :

$$|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenwert } 1 \quad (8)$$

$$|\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenwert } -1 \quad (9)$$

$$(10)$$

(1 Pkt) Eigenvektoren von S_x :

$$|+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad \text{Eigenwert } 1 \quad (11)$$

$$|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad \text{Eigenwert } -1 \quad (12)$$

$$(13)$$

(1 Pkt) + (1 Pkt) Damit lautet die gesuchte Dichtematrix:

$$\rho = \alpha |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + \beta/2 (-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) (-\langle\uparrow| + \langle\downarrow|) \quad (14)$$

(2 Pkt) In Komponenten:

$$\begin{pmatrix} \langle\uparrow|\rho|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\rho|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\rho|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\rho|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \beta/2 & -\beta/2 \\ -\beta/2 & \beta/2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

- (e) Schreiben Sie die Dichtematrix in der S_z -Basis, wieder für beliebige Anteile α und β wie in der vorherigen Teilaufgabe, falls der zweite Teil nicht im $-\hbar/2$ -Eigenzustand des $\hat{S}_x$ -Operator ist, sondern im $+\hbar/2$ -Eigenzustand des $\hat{S}_y$ -Operator. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und zeigen Sie dass die Dichtematrix positiv semidefinit ist (das heißt, dass alle Eigenwerte größer gleich 0 sind). (5 Pkt)

Lösung:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 - \beta/2 & -i\beta/2 \\ i\beta/2 & \beta/2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

(2 Pkt) Eigenwerte:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\beta(\beta - 1)}. \quad (17)$$

(2 Pkt) Damit ist $\lambda_{\pm} \geq 0 \forall \beta \in [0, 1]$. **(1 Pkt)**

2. Klassische Teilchen in einem elektrischen Feld (3 + 3 + 10 + 6 + 3 = 25 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N klassischen Teilchen im thermodynamischen Gleichgewicht in einem konstanten elektrischen Feld mit Amplitude E ($E > 0$). Die Teilchen befinden sich in einem dreidimensionalen Volumen $V = L^3$, mit dem Feld in z -Richtung. Die Ladung pro Teilchen ist $-e$ ($e > 0$).

Die klassische kanonische Zustandssumme eines dreidimensionalen N -Teilchen Systems mit Hamiltonfunktion H lautet

$$Z = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \left(\frac{d^3 p_i d^3 x_i}{(2\pi\hbar)^3} \right) \exp(-\beta H). \quad (18)$$

(a) Schreiben Sie die klassische Hamiltonfunktion H des Systems auf. **(3 Pkt)**

Lösung:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + eEz_i \right] \quad (3 \text{ Pkt}) \quad (19)$$

(b) Schreiben Sie im Allgemeinen den klassischen kanonischen Ensembleerwartungswert einer Observablen O auf. **(3 Pkt)**

Lösung:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \left(\frac{d^3 p_i d^3 x_i}{(2\pi\hbar)^3} \right) \exp(-\beta H) O \quad (3 \text{ Pkt}) \quad (20)$$

(c) Bestimmen Sie die mittlere Teilchendichte am Punkt $\mathbf{r}$, $n(\mathbf{r})$, mit Hilfe des kanonischen Ensembles. $z = 0$ soll hierbei am Rand des Volumens liegen. *Hinweis:*

Bestimmen Sie den Ensemblemittelwert der Observablen $O(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^N \delta(z_i - z)$.

Gehen Sie davon aus, dass L groß ist, im Vergleich mit allen anderen Längenskalen. **(10 Pkt)**

Lösung:

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^2} \frac{\int \prod_{i=1}^N (d^3 p_i d^3 x_i) \exp(-\beta H) \sum_{j=1}^N \delta(z_j - z)}{\int \prod_{i=1}^N (d^3 p_i d^3 x_i) \exp(-\beta H)} \quad (2 \text{ Pkt}) \quad (21)$$

Die Impulsintegrale kürzen sich in Zähler und Nenner **(3 Pkt)** und wir erhalten

$$n(\mathbf{r}) = \frac{N}{L^2} \frac{\exp(-\beta e E z)}{\int_0^L dz \exp(-\beta e E z)} \quad (2 \text{ Pkt}) \quad (22)$$

Im Integral schicken wir $L \rightarrow \infty$, da L groß ist **(1 Pkt)**. Wir erhalten:

$$n(\mathbf{r}) = \frac{N\beta eE}{L^2} \exp(-\beta eEz). \textbf{(2 Pkt)} \quad (23)$$

(Punkte nur für korrekte Benutzung des kanonischen Ensemble)

(d) Laut der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist die Dichte gegeben durch:

$$n_{\text{MB}}(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left(\frac{-eEz}{k_B T}\right) \quad (24)$$

wobei n_0 von der Position unabhängig ist. Berechnen Sie hiermit die Dichte $n(x, y, z = 0) =: n_0$, als Funktion von der Gesamtzahl der Teilchen N und der Temperatur T . Bekommen Sie das gleiche Resultat wie in Teil c)? Wie würde n_0 im Grenzfall $L \rightarrow \infty$ lauten, falls die Richtung des Feldes invertiert werden würde ($E \rightarrow -E$)? **(6 Pkt)**

Lösung:

$$N = \iiint d^3\vec{r} n_{\text{MB}}(\mathbf{r}) \textbf{(1 Pkt)} = L^2 \int_0^L dz n_{\text{MB}}(\mathbf{r}) \textbf{(1 Pkt)} \quad (25)$$

$$\approx L^2 \int_0^\infty dz n_{\text{MB}}(\mathbf{r}) = L^2 n_0 \frac{k_B T}{eE}, \textbf{(2 Pkt)} \quad (26)$$

wobei die Näherung gerechtfertigt ist durch das große Volumen. Es folgt:

$$n_0(T, N) = \frac{NeE}{L^2 k_B T}. \textbf{(1 Pkt)} \quad (27)$$

Im Fall $E \rightarrow -E$, ist $n_0 = 0, \forall T$. **(1 Pkt)**

(e) Was passiert im Limit $T \rightarrow 0$? Begründen Sie, ob n_0 niedriger, gleich, oder größer sein würde in diesem Grenzfall, falls die Teilchen Fermionen wären. **(3 Pkt)**

Lösung: Im Limit $T \rightarrow 0$, bleiben alle Teilchen bei $z = 0$, weil es nicht genug kinetische Energie gibt und die Potentialenergie „gewinnt“ ($n(z)$ wird in diesem Limit zur Delta-Funktion). Im Quantenlimit müssen wir hier Bose-Einstein- oder Fermi-Dirac-Statistik betrachten. Für Fermionen bedeutet das, dass n_0 niedriger sein muss **(3 Pkt)** durch den Entartungsdruck (wie viel niedriger hängt ab von N/V und dem Entartungsgrad der Fermionen).

3. Kanonische Zustandssumme

(3 + 8 + 6 + 8 = 25 Punkte)

Ein Teilchen sei beschrieben durch einen Hamiltonoperator H , der in einer bestimmten Basis lautet

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & J \\ J & \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte des Hamiltonoperators. **(3 Pkt)**

Lösung: Die Eigenwerte sind gegeben als

$$E_{1/2} := \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \sqrt{4J^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}}{2}. \quad (29)$$

(3 Pkt)

- (b) Betrachten Sie zwei ununterscheidbare Fermionen, die jeweils durch H beschrieben werden und zusätzlich Spin-1/2 besitzen (der Hamiltonoperator ist also unabhängig vom Spin). Stellen Sie die kanonische Zustandssumme auf. **(8 Pkt)**

Lösung: Die Eigenenergien des Systems sind

$$E_{1/2} := \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \sqrt{4J^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}}{2}. \quad (30)$$

(1 Pkt) Es gibt die folgenden Vielteilchenzustände (jeweils mit Spinentartung)

$$|2, 0\rangle \rightarrow 1 \quad (31)$$

$$|0, 2\rangle \rightarrow 1 \quad (32)$$

$$|1, 1\rangle \rightarrow 4 \quad (33)$$

Zustände: **(2 Pkt)**, Entartungen: **(3 Pkt)**

Also lautet die Zustandssumme

$$Z(T, V) = \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \right] = e^{-2\beta E_1} + e^{-2\beta E_2} + 4e^{-\beta(E_1+E_2)} \quad (34)$$

(2 Pkt)

- (c) Berechnen Sie die Entropie $S(T, V)$ aus der Zustandssumme der vorherigen Teilaufgabe. **(6 Pkt)**

Lösung: Die Entropie ist:

$$F(T, V) = -k_B T \ln(Z(T, V)) \quad (35)$$

$$S(T, V) = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} \quad (36)$$

$$= k_B \frac{\partial}{\partial T} [T \ln(Z(T, V))] \quad (1 \text{ Pkt}) \quad (37)$$

$$= k_B \left[\ln(Z) + \frac{T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} \right] \quad (38)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{2}{k_B T^2} (E_1 e^{-2\beta E_1} + E_2 e^{-2\beta E_2} + 2(E_1 + E_2) e^{-\beta(E_1+E_2)}) \quad (39)$$

Also

$$S(T, V) = \frac{2 (E_1 e^{-2\beta E_1} + E_2 e^{-2\beta E_2} + 2(E_1 + E_2) e^{-\beta(E_1+E_2)})}{T (e^{-2\beta E_1} + e^{-2\beta E_2} + 4e^{-\beta(E_1+E_2)})} \quad (40)$$

$$+ k_B \ln \left(4e^{-\frac{E_1+E_2}{k_B T}} + e^{-\frac{2E_1}{k_B T}} + e^{-\frac{2E_2}{k_B T}} \right) \quad (41)$$

(5 Pkt)

- (d) Betrachten Sie jetzt **drei** ununterscheidbare Spin-0 Bosonen, die jeweils durch H beschrieben werden. Stellen Sie wieder die kanonische Zustandssumme auf. **(8 Pkt)**

Lösung: Zustände:

$$|3, 0\rangle \quad (42)$$

$$|0, 3\rangle \quad (43)$$

$$|1, 2\rangle \quad (44)$$

$$|2, 1\rangle \quad (45)$$

(3 Pkt), jeweils nicht entartet (2 Pkt). Zustandssumme:

$$Z = e^{-3\beta E_1} + e^{-3\beta E_2} + e^{-\beta(E_1+2E_2)} + e^{-\beta(E_2+2E_1)} \quad (46)$$

(2 Pkt), wieder mit den Eigenenergien des Hamilton-Operators. (1 Pkt)

4. Thermodynamik eines idealen molekularen Gases (11 + 3 + 6 + 5 = 25 Punkte)

Die kanonische Zustandssumme eines klassischen idealen Gases mit Rotationsfreiheitsgrad lautet

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N \left(\frac{2Ik_B T}{\hbar^2} \right)^N \quad (47)$$

$$\lambda_T := \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}}, \quad (48)$$

wobei I ein molekulspezifischer Parameter ist. Der extra Faktor (der letzte Faktor) kommt durch die Rotationen von zweiatomigen Molekülen. Vibrationsfreiheitsgrade vernachlässigen wir in dieser Aufgabe.

- (a) Leiten Sie $P(T, V, N)$ (Gasgesetz) und $U(T, V, N)$ (innere Energie) im Limit $N \gg 1$ her. (11 Pkt)

Lösung: Für die freie Energie $F(T, V, N)$ gilt

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln[Z(T, V, N)] \quad (1 \text{ Pkt}) \quad (49)$$

$$= k_B T \left[\ln(N!) + N \ln \left(\frac{\hbar^2 \lambda_T^3}{2V I k_B T} \right) \right] \quad (50)$$

$$\approx k_B T \left[N \ln(N) - N + N \ln \left(\frac{\hbar^2 \lambda_T^3}{2V I k_B T} \right) \right] \quad (1 \text{ Pkt}) \quad (51)$$

$$= k_B T N \ln \left(\frac{\lambda_T^3 N \hbar^2}{2e V I k_B T} \right) \quad (52)$$

Hier haben wir die Stirling-Formel verwendet (1 Pkt). Für den Druck folgt

$$P(T, V, N) = - \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial V} \quad (53)$$

$$= N k_B T / V. \quad (2 \text{ Pkt}) \quad (54)$$

Für die innere Energie gilt

$$U(T, V, N) = F(T, V, N) + T S(T, V, N) \quad (55)$$

$$= F(T, V, N) - T \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial T} \quad (1 \text{ Pkt}) \quad (56)$$

Die Ableitung:

$$\frac{\partial F(T, V, N)}{\partial T} = \frac{F(T, V, N)}{T} + k_B T N \left(-\frac{1}{T} + \frac{1}{\lambda_T^3} \frac{\partial \lambda_T^3}{\partial T} \right) \quad (57)$$

$$= \frac{F(T, V, N)}{T} + k_B T N \frac{1}{\lambda_T^3} 3\lambda_T^2 \frac{\partial \lambda_T}{\partial T} - k_B N \quad (58)$$

$$= \frac{F(T, V, N)}{T} + k_B T N \frac{1}{\lambda_T^3} 3\lambda_T^2 (-\lambda_T / (2T)) - k_B N \quad (59)$$

$$= \frac{F(T, V, N)}{T} - \frac{5}{2} k_B N. \quad (60)$$

(3 Pkt) Also

$$U(T, V, N) = \frac{5}{2} N k_B T \text{ (2 Pkt)}. \quad (61)$$

- (b) Geben Sie ein Argument, warum das Vernachlässigen von Vibrationsfreiheitsgraden gerechtfertigt ist. (3 Pkt)

Lösung: Natürlich haben zweiatomige Moleküle tatsächlich Quanten-Moden für Vibrationen $\hbar\omega_0(1/2 + n)$, ($n \in \mathbb{N}$). Grund dass man diese Moden vernachlässigen kann, ist dass oft $\hbar\omega_0 \gg k_B T$. Damit sind die Vibrationsfreiheitsgrade „gefroren“ (2 Pkt). Der Ausdruck $U = (5/2) N k_B T$ ist darum nur gültig, falls $\lambda_T^{-3} \gg N/V$ (klassisches Limit), aber auch $k_B T \ll \hbar\omega_0$. (1 Pkt) Diese Bedingungen sind in guter Näherung erfüllt für Luft bei Zimmertemperatur.

- (c) Das ideale Gas mit Rotationsfreiheitsgrad befindet sich nun in einem Kolben mit Volumen V_0 , Druck p_0 und Temperatur T_0 . Ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung wird der Druck auf $p_1 > p_0$ erhöht, mit $p_1/p_0 =: \gamma$. Nutzen Sie die Gleichungen für $P(T, V, N)$ und $U(T, V, N)$ um einen Zusammenhang zwischen Druck und Volumen für diesen Prozess herzuleiten. Drücken Sie damit das Volumen am Ende des Prozesses $V_1 = V_1(V_0, \gamma)$ durch V_0 und γ und die Temperatur am Ende des Prozesses $T_1 = T_1(T_0, \gamma)$ durch T_0 und γ aus. (6 Pkt)

Lösung: Kein Wärmeaustausch mit der Umgebung bedeutet $\delta Q = 0$ (1 Pkt), also:

$$dU = -p dV \text{ (1 Pkt)} \quad (62)$$

Also, mit $U(T, V, N)$ und $V(T, V, N)$:

$$(5/2) N k_B dT = -N k_B T \frac{dV}{V} \quad (63)$$

Also

$$(5/2) \ln(T_1/T_0) = -\ln(V_1/V_0) \quad (64)$$

oder

$$T^{5/2} V = \text{konst.} \text{ (2 Pkt)} \quad (65)$$

Wir verwenden wieder das ideale Gasgesetz:

$$p^{5/2} V^{7/2} = \text{konst.} \quad (66)$$

$$\Rightarrow p V^{7/5} = \text{konst.} \quad (67)$$

Damit finden wir

$$p_1 V_1^{7/5} = p_0 V_0^{7/5} \quad (68)$$

$$\Leftrightarrow V_1 = V_0 / \gamma^{5/7} \text{ (1 Pkt)} \quad (69)$$

und

$$T_1^{5/2} V_1 = T_0^{5/2} V_0 \quad (70)$$

$$\Leftrightarrow T_1 = T_0 (V_0/V_1)^{2/5} \quad (71)$$

$$= T_0 \gamma^{2/7} \text{ (1 Pkt)} \quad (72)$$

- (d) Berechnen Sie die Wärmekapazität des Gases bei konstantem Druck (und konstanter Teilchenzahl) $c_P(T, P, N)$. **(5 Pkt)**

Lösung: Es gilt nach Definition der Wärmekapazität

$$T \frac{\partial \tilde{S}(T, P, N)}{\partial T} = c_P(T, P, N) \quad \textbf{(1 Pkt)} \quad (73)$$

Wobei $\tilde{S}(T, P, N)$ die Entropie als Funktion von T, P, N ist. Wir haben bereits die Entropie als Funktion von T, V, N in der letzten Teilaufgabe berechnet:

$$S(T, V, N) = - \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial T} \quad (74)$$

$$= \frac{5}{2} k_B N - k_B N \ln \left(\frac{\lambda_T^3 N \hbar^2}{2eV I k_B T} \right) \quad \textbf{(1 Pkt)} \quad (75)$$

Wir finden also

$$\tilde{S}(T, P, N) = \frac{5}{2} k_B N - k_B N \ln \left(\frac{\lambda_T^3 \hbar^2 P}{2eI (k_B T)^2} \right) \quad \textbf{(1 Pkt)} \quad (76)$$

und damit

$$c_P(T, P, N) = -T k_B N \left[\frac{3}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial T} - \frac{2}{T} \right] \quad (77)$$

$$= \frac{7}{2} N k_B. \quad \textbf{(2 Pkt)} \quad (78)$$