Zusatzblatt zum Übungsblatt 1 und Dichtematrizen

December 18, 2020 Albert Zhou

1 Gemischte gegenüber reine Zustände

Betrachtet den Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{\uparrow_{\hat{n}}}\rangle_L \otimes |{\downarrow_{\hat{n}}}\rangle_R + |{\downarrow_{\hat{n}}}\rangle_L \otimes |{\uparrow_{\hat{n}}}\rangle_R \right), \tag{1}$$

wobei

$$|{\uparrow_{\hat{n}}}\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |{\uparrow_z}\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} |{\downarrow_z}\rangle \qquad |{\downarrow_{\hat{n}}}\rangle = \sin\frac{\theta}{2} |{\uparrow_z}\rangle - \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} |{\downarrow_z}\rangle. \tag{2}$$

Zusätzliches Bsp. Zeigt, dass

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[&\sin\theta\, |{\uparrow_z}\rangle_L \otimes |{\uparrow_z}\rangle_R - (\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi) |{\uparrow_z}\rangle_L \otimes |{\downarrow_z}\rangle_R \\ &- (\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi) |{\downarrow_z}\rangle_L \otimes |{\uparrow_z}\rangle_R - \sin\theta\, |{\downarrow_z}\rangle_L \otimes |{\downarrow_z}\rangle_R \Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

Nach einer Messung des linken Spins entlang der z-Achse könnten zwei Ergebnisse entstehen,

$$\left.\begin{aligned} |v_1\rangle = (|{\uparrow_z}\rangle\langle{\uparrow_z}| \otimes \mathbb{1}) |\Psi\rangle &= [\langle{\uparrow_z} \mid {\downarrow_{\hat{n}}}\rangle |{\uparrow_z}\rangle \otimes |{\uparrow_{\hat{n}}}\rangle + \langle{\uparrow_z} \mid {\uparrow_{\hat{n}}}\rangle |{\uparrow_z}\rangle \otimes |{\downarrow_{\hat{n}}}\rangle] \\ &= |{\uparrow_z}\rangle \otimes [\langle{\uparrow_z} \mid {\downarrow_{\hat{n}}}\rangle |{\uparrow_{\hat{n}}}\rangle + \langle{\uparrow_z} \mid {\uparrow_{\hat{n}}}\rangle |{\downarrow_{\hat{n}}}\rangle], \\ |v_2\rangle = (|{\downarrow_z}\rangle\langle{\downarrow_z}| \otimes \mathbb{1}) |\Psi\rangle &= [\langle{\downarrow_z} \mid {\downarrow_{\hat{n}}}\rangle |{\downarrow_z}\rangle \otimes |{\uparrow_{\hat{n}}}\rangle + \langle{\downarrow_z} \mid {\uparrow_{\hat{n}}}\rangle |{\downarrow_z}\rangle \otimes |{\downarrow_{\hat{n}}}\rangle] \\ &= |{\downarrow_z}\rangle \otimes [\langle{\downarrow_z} \mid {\downarrow_{\hat{n}}}\rangle |{\uparrow_{\hat{n}}}\rangle + \langle{\downarrow_z} \mid {\uparrow_{\hat{n}}}\rangle |{\downarrow_{\hat{n}}}\rangle]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mit jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $|\langle v_1|\Psi\rangle|^2$ und $|\langle v_2|\Psi\rangle|^2$. (*Achtung*: Wir haben die Endzustände direkt normiert.)

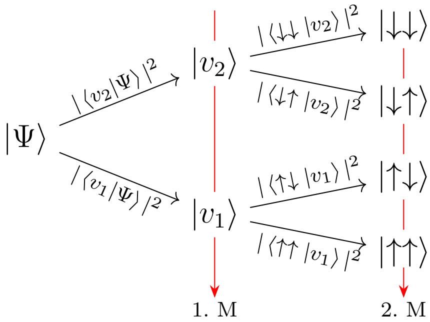
Zusätzliches Bsp. Der Anfangszustand $|\Psi\rangle$ ist verschränkt, weil er in einer beliebigen Basis nicht als $|a\rangle \otimes |b\rangle$ geschrieben werden kann. Beweist dies in Hinsicht auf Gl. (3). Anderseits sind $|v_{1,2}\rangle$ offensichtlich nicht verschränkt.

Anmerkung Verschränkte Zustände sind sehr nützlich und werden viel im Bereich des ,,Quantum Computing“ studiert. Zu wissen, ob ein beliebiger Zustand verschränkt ist, ist ein sehr schweres Problem. Wenn wir ein n-Spin System betrachten, ist die Dimension des Hilbertraums der möglichen Zustände 2^n. Mit so vielen Möglichkeiten ist die Theorie sehr kompliziert und subtil. Zum Beispiel können Zustände unterschiedliche Grade an Verschränkung haben. Weil Verschränkung essentiell für ,,Quantum Computing“ ist, ist die Bestimmung des Grades der Verschränkung ein sehr wichtiges Problem. Dazu ist die Von-Neumann Entropie relevant. Für weitere Infos, siehe §§11,12 und insbesondere §12.5.2 von [Nielsen & Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (2011)] und §3 [Bergou & Hillery, *Introduction to the Theory of Quantum Information Processing* (2013)]. Diese Thematik stammt aus den Überlegungen zu den Grundlagen der Quantenmechanik. Z.B. der erste verschränkte Zustand kam vom Einstein-Poldolsky-Rosen Paradoxon. Dies wurde von J. Bell weiter untersucht und führte zu seinen Bell-Ungleichungen. Siehe z.B. §4 [McIntyre, D et al., *Quantum Mechanics: A Paradigms Approach* (2012)].

Nach der ersten Messung wird der rechte Spin gemessen. Nach der zweiten Messung könnte vier Ergebnisse entstehen,

$$\begin{aligned}(\mathbb{1}\otimes|{\uparrow_z}\rangle\langle{\uparrow_z}|)\,|v_1\rangle &= |{\uparrow_z}\rangle\otimes|{\uparrow_z}\rangle\,, \quad (\mathbb{1}\otimes|{\downarrow_z}\rangle\langle{\downarrow_z}|)\,|v_1\rangle = |{\uparrow_z}\rangle\otimes|{\downarrow_z}\rangle\,,\\ (\mathbb{1}\otimes|{\uparrow_z}\rangle\langle{\uparrow_z}|)\,|v_2\rangle &= |{\downarrow_z}\rangle\otimes|{\uparrow_z}\rangle\,, \quad (\mathbb{1}\otimes|{\downarrow_z}\rangle\langle{\downarrow_z}|)\,|v_2\rangle = |{\downarrow_z}\rangle\otimes|{\downarrow_z}\rangle\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Wir können daraus einen Wahrscheinlichkeit-Baum für die Ergebnisse der ersten und zweiten Messungen (jeweils 1. M und 2. M) bilden:



$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}(s_i|1.\ \mathrm{M}) &= |\langle v_i|\Psi\rangle|^2 = \langle v_i\,|\,\rho_\Psi\,|\,v_i\rangle\\ \mathrm{P}(s|2.\ \mathrm{M}) &= \sum_{i,j=1,2} |\langle s_j s\,|\,v_i\rangle|^2 |\langle v_i\,|\,\Psi\rangle|^2\\ &= \sum_{i=1,2}\langle s_i s\,|\,\rho_{1.\ \mathrm{M}}\,|\,s_i s\rangle\\ \text{wobei}\ \ \rho_{1.\ \mathrm{M}} &= \sum_{i=1,2}|\langle v_i\,|\,\Psi\rangle|^2\,|v_i\rangle\langle v_i|\,;\\ s_{1,2} = {\uparrow_z},{\downarrow_z};\quad \rho_\Psi &= |\Psi\rangle\langle\Psi|\,;\quad \langle s_j s\,|\,v_i\rangle \propto \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir können auch eine effektive Dichtematrix für den linken und rechten Spin durch die teilweise Spur bestimmen:

$$\begin{aligned}\rho_L = \mathrm{Sp}_R\,\rho &= \sum_{s,s'={\uparrow_z},{\downarrow_z}}\ \sum_{\sigma={\uparrow_z},{\downarrow_z}} |s\rangle_L\,\langle s_L\sigma_R\,|\,\rho\,|\,s'_L\sigma_R\rangle\,\langle s'|_L\\ \rho_R = \mathrm{Sp}_L\,\rho &= \sum_{s,s'={\uparrow_z},{\downarrow_z}}\ \sum_{\sigma={\uparrow_z},{\downarrow_z}} |s\rangle_R\,\langle \sigma_L s_R\,|\,\rho\,|\,\sigma_L s'_R\rangle\,\langle s'|_R\,,\end{aligned} \tag{7}$$

wobei die teilweise Spur $\mathrm{Sp}_{L,R}$ bedeutet, dass man nur über die jeweiligen linken oder rechten Spins summieren.

Zusätzliches Bsp. Zeigt, dass

$$P(s|2.\ \mathrm{M}) = \langle s\,|\,\mathrm{Sp}_L\,\rho_{1.\ \mathrm{M}}\,|\,s\rangle \qquad \text{und} \qquad P(s|1.\ \mathrm{M}) = \langle s\,|\,\mathrm{Sp}_R\,\rho_\Psi\,|\,s\rangle \qquad \text{gelten.} \tag{8}$$

2 Literaturhinweise

Alle diese Bücher sind als E-Book durch die KIT-Bilbliothek-Webseite erhältlich:

- David J. Griffiths, Quantenmechanik, §12,

- Michele Cini, Elements of Classical and Quantum Physics §27.2,
- Hans Lüth, Quantum Physics in the Nanoworld §7,
- Bernard d'Espagnat, Hervé Zwirn, The Quantum World - Philosophical Debates on Quantum Physics, §5.2.3.