kritische Phänomene + Phasenübergänge ... (kont.)

Ising Modell ⟶ effektive Feldtheorie

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta H_{eff}[\phi]}$$

$$H_{eff}[\phi] = \frac{1}{2}\int d^d r \left(a\,\phi^2 + b(\nabla\phi)^2 + \frac{u}{2}\phi^4 - h\,\phi \right)$$

Landau - Theorie d. Phasenübergänge

$$F[\phi] = \int d^d r \; f(\phi)$$

$$f(\phi) = \frac{1}{2} a \phi^2 + \frac{u}{4}\phi^4 - h\phi$$

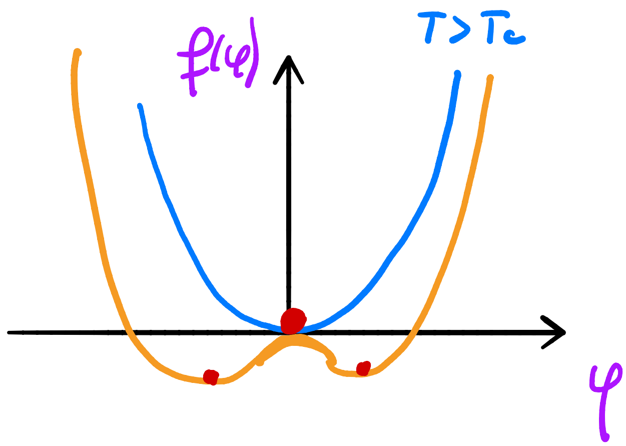
physikalisch relevante Wert des Ordnungsparameters ϕ wird durch Minimierung der freien Energie bestimmt

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_0} = 0$$

$$\underline{a\,\phi_0 + u\,\phi_0^3 = h}$$

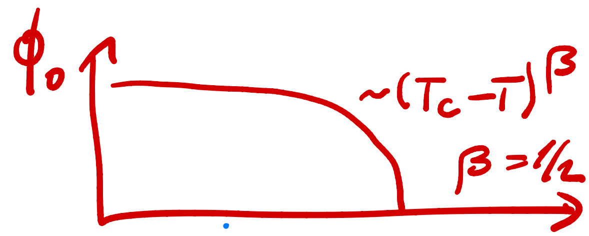
$a = a_0(T - T_c)$ wechselt am Phasenübergangspunkt das Vorzeichen.

ohne magnetisches Feld

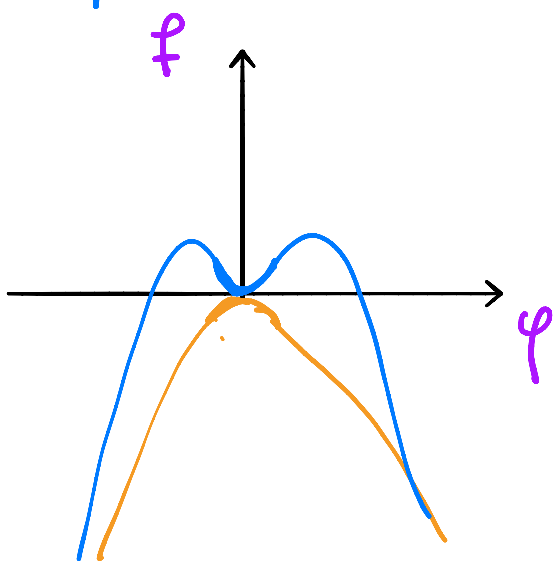


$T > T_c \quad \phi_0 = 0$

$T < T_c \quad \phi_0 = \sqrt{\frac{-a}{u}} \neq 0$



was passiert, wenn $u < 0$?



1. die Theorie ist instabil !!!

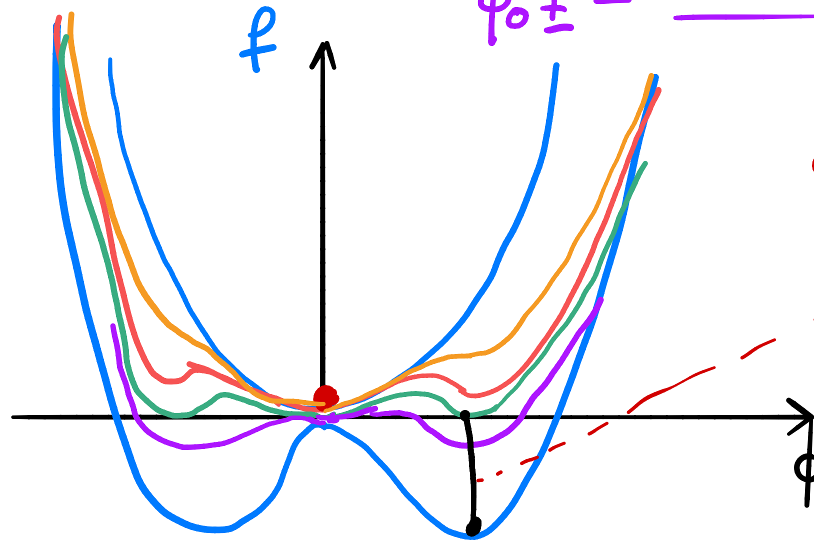
2. wir müssen in unserer Entwicklung d. freien Energie höhere Terme berücksichtigen.

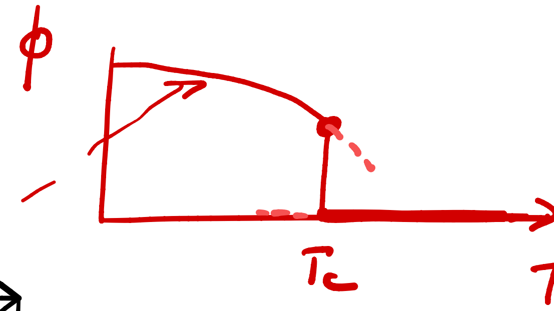
$$f(\phi) = \frac{a}{2}\phi^2 + \frac{u}{4}\phi^4 + \frac{w}{6}\phi^6 \qquad (w > 0)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_0} = a\phi_0 + u\phi_0^3 + w\phi_0^5 = 0$$

$\phi_0 = 0$ oder $a + u\phi_0^2 + w\phi_0^4 = 0$

$$\phi_{0\pm}^2 = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4aw}}{2w}$$





Phasenübergang 1. Ordnung

Der Weg vom Funktionalintegral $\int \mathcal{D}\phi \cdots = \int \prod_r d\phi(r)$

zur Landau Theorie

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta H[\phi]} \approx e^{-\beta H[\phi_0]}$$

ϕ_0 minimiert $H[\phi]$

Freie Energie $\quad F = -k_B T \log Z$

$$= H[\phi_0]$$

inhomogene Ordnungsparameter

$$F[\phi] = \int d^d r \, f(\phi, \nabla\phi) \qquad S[q] = \int_0^{\infty} dt\, \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

$$f = \frac{a}{2}\phi^2 + \frac{u}{4}\phi^4 - h(r)\,\phi(r) + \frac{b}{2}(\nabla\phi)^2$$

Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\phi} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\boxed{a\phi + u\phi^3 - h = \nabla^2\phi}$$

Was passiert mit dem Ordnungsparameter, wenn man ein räumlich variierendes Feld betrachtet?

$$h(\vec{r}) \longrightarrow \phi(\vec{r}\,')$$

$$\phi \to \phi + \delta\phi(\vec{r}) \qquad \delta\phi(\vec{r}) = \int \chi(\vec{r}-\vec{r}\,')\, h(\vec{r}\,')\, d^d\vec{r}\,'$$

$$\chi(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\delta\phi(\vec{r})}{\delta h(\vec{r}\,')}$$

$$\phi(r) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikr} \phi(k)$$

$$\boxed{\delta\phi(k) = \chi(k)\, h(k)}$$

Jede Fourier-Mode regt nur O.P. Variationen mit dem gleichen Wellenvektor an!

$\chi(k)$ verallgemeinerte Suszeptibilität

$$\chi_{(r-r')} = \frac{\partial \phi(r)}{\partial h(r')}$$

Berechnung der Suszeptibilität

1. oberhalb der Übergangstemperatur

$$a\phi(r) + u\phi^3(r) - h(r) = b\nabla^2\phi(r)$$

für $h = 0$ $\qquad \phi(r) = \phi_0 = 0$

linearisierte Theorie

$$a\phi(r) - h(r) = b\nabla^2\phi(r)$$

Fouriertransformation: $\quad (a + bk^2)\phi(k) = h(k)$

$$\phi(k) = \frac{1}{a+bk^2}\, h(k)$$

$$\chi(k) = \frac{1}{a+bk^2}$$

d.h. bekannte thermodyn. Suszeptibilität

$$\chi_{td.} = \chi(k \to 0)$$

$$= \frac{1}{a} = \frac{1}{a_0(T-T_c)}$$

$$\chi(\vec{k}) = \chi_{th.}\, \phi(k\xi)$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{b}{a}k^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\xi = \sqrt{\frac{b}{a}}}$$

Korrelations-länge

$$\xi = \sqrt{\frac{b}{a_0}}\, \frac{1}{(T-T_c)^{\nu}} \qquad \nu = 1/2$$

Korrelationslänge divergiert am Phasen-übergang 2. Ordnung!!!

$$\chi(r) = \int d^d k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \frac{1}{a+bk^2} \sim \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-|\vec{r}|/\xi}$$

2. unterhalb der übergangstemperatur

$$a\,\phi(r) + u\,\phi^3(r) - h(r) = b\,\nabla^2\phi(r)$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi(r)$$

$$\left(a + 3u\phi_0^2\right)\delta\phi(r) - h(r) = b\,\nabla^2\delta\phi(r)$$

$$\phi_0^2 = -\frac{a}{u}$$

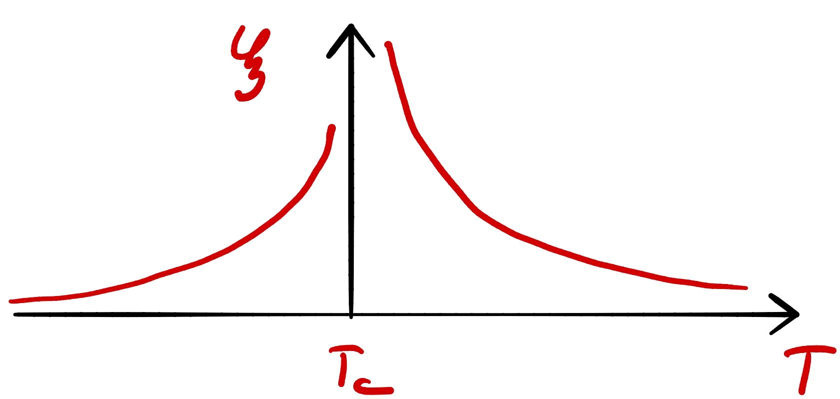
$$-2a\,\delta\phi(r) - h(r) = b\,\nabla^2\delta\phi(r)$$

$$\vdots$$

$$\chi(k) = \frac{1}{2a_0(T_c - T) + b\,k^2}$$

$$\vdots$$

$$\xi = \sqrt{\frac{b}{2a_0(T_c - T)}}$$



$$\chi(r-r') = \beta \left\langle (\phi(r) - \phi_0)(\phi(r') - \phi_0) \right\rangle$$

Die Suszeptibilität ist ein Maß für Fluktuationen!

$$Z[h(r)] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta H_{eff}[\phi] + \beta \int d^d r \, h(r)\phi(r)}$$

$$\frac{\delta \log Z}{\delta h(r')} = \frac{1}{Z} \beta \int \mathcal{D}\phi \, \phi(r') \, e^{-\beta H + \beta \int h\phi} = \beta \langle \phi(r') \rangle$$

$$\chi(r-r') = \frac{\delta \langle \phi(r) \rangle}{\delta h(r')} = k_B T \frac{\delta \log Z[h]}{\delta h(r) \, \delta h(r')}$$

$$= -\frac{k_B T}{Z^2} \left(\beta \int \mathcal{D}\phi \, \phi(r) \, e^{-\beta H + \beta \int h\phi} \right)^2$$

$$\frac{k_B T}{Z} \beta^2 \int \mathcal{D}\phi \, \phi(r') \phi(r) \, e^{-\beta H + \beta \int h\phi}$$

$$= -\beta \langle \phi(r) \rangle \langle \phi(r') \rangle + \beta \langle \phi(r) \phi(r') \rangle$$

$$= \beta \left\langle (\phi(r) - \langle \phi(r) \rangle)(\phi(r') - \langle \phi(r') \rangle) \right\rangle$$

Wann sind Fluktuationen wichtig:

$$\frac{1}{\xi^d}\int_{|r|<\xi} \langle(\phi(r)-\langle\phi\rangle)(\phi(0)-\langle\phi\rangle)\rangle \, d^d r$$

$$= \frac{1}{\xi^d}\int_{r<\xi} d^d r\, \chi(r) = \frac{1}{\xi^d}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\chi(k)\int_{r<\xi} e^{ikr}\, dr$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} dx\, e^{ik_x r} \simeq \frac{\sin k_x \xi}{k_x}$$

$$= \frac{1}{\xi^d}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, \frac{b^{-1}}{k^2+\xi^{-2}}\, \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{\sin k_\alpha \xi}{k_\alpha}$$

$$x_\alpha = \xi k_\alpha$$

$$= \frac{1}{\xi^{d-2}}\, I$$

$$\langle\delta\phi^2\rangle_\xi \sim \xi^{2-d}$$

$$\langle\phi\rangle^2 \sim T_c - T \sim \xi^{-2}$$

$$\xi \sim \frac{1}{(T_c-T)^{1/2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\langle\delta\phi^2\rangle}{\langle\phi\rangle^2} \sim \xi^{4-d}}$$

$\Rightarrow \quad 4-d > 0 \qquad d < 4$

Fluktuationen divergieren (sind wichtiger als der Mittelwert)

$d > 4$

Fluktuationen werden zunehmend unwichtiger.

$\Longrightarrow$ Landau Theorie ist korrekt für $d > 4$

Andernfalls muß man Korrekturen genauer berücksichtigen !!!!

Taylorreihe $\qquad \varepsilon = 4-d$