Brown'sche Bewegung + stochastische Dynamik

Betrachten ein Kontinuum von Teilchen mit

$\rho(\vec{x},t)$ als Teilchendichte

·) Es gilt Teilchenzahlerhaltung

$\Longrightarrow$ Kontinuitätsgleichung

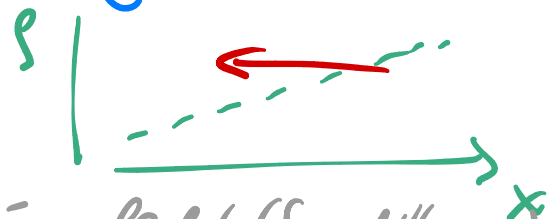
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^d x = -\int_V \nabla \cdot \vec{j}\, d^d x = -\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= 0$$

• Es gilt das Fick'sche Gesetz

$$\vec{j} = -D\nabla\rho$$



$$\vec{j}(r) = \int dr'\, D(r-r')\, \nabla\rho(r') \rightarrow \text{Lévy flight (Superdiffusion)}$$

Es ergibt sich eine geschlossene Gleichung für die Dichte:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - D\nabla^2\rho = 0$$

Diffusionsgleichung

D : Diffusionskoeffizient

Lösung durch Fouriertransformation

$$\rho(\vec{x},t) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, \rho(\vec{k},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\nabla\rho(\vec{x},t) = -i\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, \vec{k}\,\rho(\vec{k},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\nabla^2\rho(\vec{x},t) = -\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, \vec{k}^2\rho(\vec{k},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial\rho(\vec{k},t)}{\partial t} = -D\vec{k}^2\rho(\vec{k},t)$$

Lösung

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\vec{k},t) &= \rho_0(\vec{k})\, e^{-D\vec{k}^2 t} \\ \rho_0(\vec{k}) &= \rho(\vec{k}, t=0) \end{aligned}}$$

Annahme: Am Anfang, also für $t=0$, gilt

$$\rho_0(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$$

= ein perfekt lokalisiertes Teilchen (oder eines Fluids)

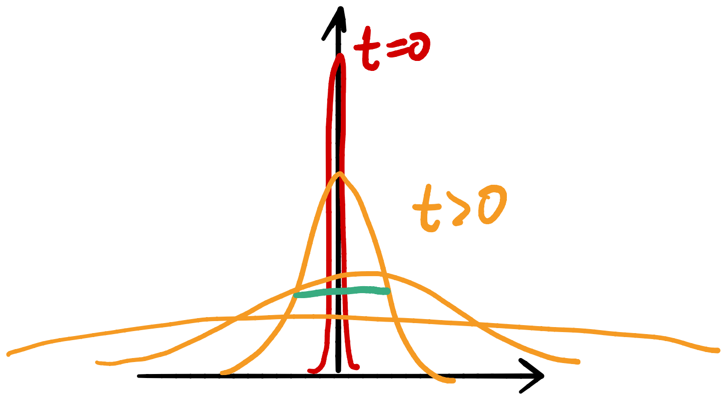
$$\Rightarrow \quad \rho_0(\vec{k}) = 1$$

$$\rho(\vec{k},t) = e^{-Dk^2 t}$$

$$\downarrow$$

$$\rho(\vec{x},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{-Dk^2 t}$$

$$= \frac{1}{(4\pi D t)^{d/2}}\, e^{-\vec{x}^2/(4Dt)}$$



$\langle x^2(t)\rangle = 2Dt$ Diffusion

bei ballistischer Bewegung

$\vec{x} = \vec{v}\, t$

random walks (Zufallswanderer)

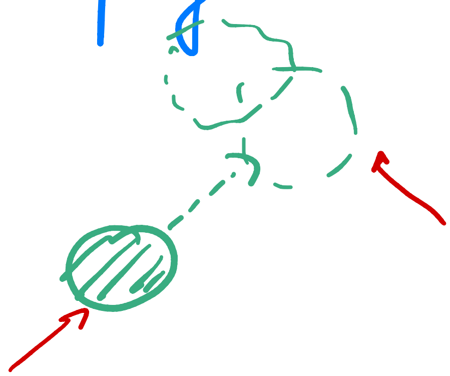
betrachten eine Zufallswanderin:

Zu jedem Zeitpunkt $t_n = n\tau$

findet ein Sprung um die Länge ℓ_n statt.

(betrachten $d=1$)

- Die Sprunglänge ist eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $p(\ell)$
- Aufeinanderfolgende Sprünge seien statistisch unabhängig.

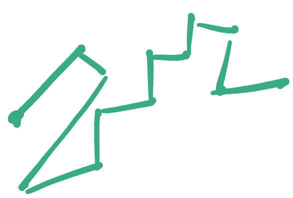


- das nullte, erste und zweite Moment von $p(\ell)$ existieren

$$\langle \ell^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^m \, p(\ell)\, d\ell$$

$$\langle \ell^0 \rangle = \langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(\ell)\, d\ell = 1$$

$$\langle \ell \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(\ell)\, \ell \, d\ell \; ; \quad \langle \ell^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(\ell)\, \ell^2 \, d\ell$$



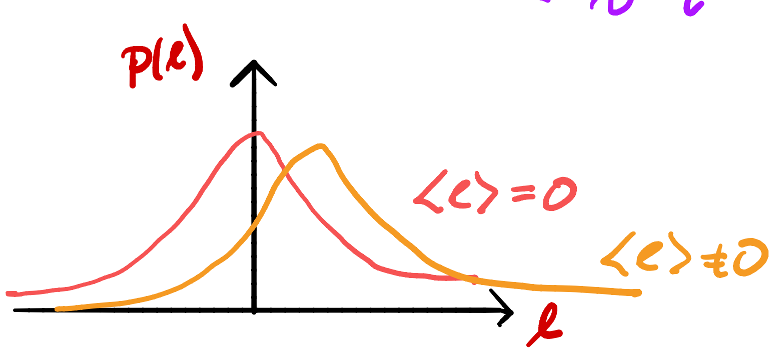
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^{N} \ell_n \\ t &= N\tau \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Mittelwert

$$\langle x(t) \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle \ell_n \rangle = N \langle \ell \rangle = \frac{\langle \ell \rangle}{\tau} t$$

$$= v\, t$$

mit mittlerer Geschwindigkeit $v = \langle \ell \rangle / \tau$



$$x' = x - vt$$

Ohne Einschränkungen nehmen wir an, dass

$\langle \ell \rangle = 0$

Die Standardabweichung

$$\langle x(t)^2 \rangle = \sum_{n,n'} \underbrace{\langle \ell_n \ell_{n'} \rangle}_{\delta_{nn'} \langle e^2 \rangle} = \langle e^2 \rangle \sum_{n=1}^{N} 1 = \langle e^2 \rangle N$$

$$= 2Dt \qquad D = \frac{\langle e^2 \rangle}{2\tau}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x,t)$

dafür, dass unser Zufallswanderer zum Zeitpunkt t am Ort x ist.

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_N \prod_{n=1}^{N} p(\ell_n)\, \delta\!\left(\frac{x}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \ell_n\right)$$

$$\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)}\, e^{iky}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_1 \ldots d\ell_N \prod_{n=1}^{N} p(\ell_n)\, e^{ik\left(\frac{x}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \ell_n\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx/\sqrt{N}} \Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\ell\, p(\ell)\, e^{-ik\ell/\sqrt{N}}}_{\hat{p}(k/\sqrt{N})} \Bigg)^{N}$$

$$\hat{p}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\ell\, p(\ell)\, e^{-iq\ell}$$

(erzeugende Funktion, charakteristische Funktion)

$$\hat{p}(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-iq)^m}{m!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\ell\, p(\ell)\, \ell^m}_{\langle \ell^m \rangle}$$

$$\hat{p}(k/\sqrt{N})^N = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\langle \ell^2 \rangle}{N} k^2 + \mathcal{O}(N^{-3/2})\right)^N$$

$$e^x = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

$$\simeq e^{-\frac{\langle \ell^2 \rangle k^2}{2}}$$

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{N}\, 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx/\sqrt{N}}\; e^{-\frac{\langle \ell^2 \rangle k^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\epsilon^2\rangle N}}\, e^{-\frac{x^2}{2\langle\epsilon^2\rangle N}} \qquad N = t/\tau$$

$$\boxed{P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}} \qquad t/\tau \gg 1$$

- dieses Gauß'sche Verhalten ist so universell, weil es für lange Zeiten unabhängig von den Details der Schritt-wahrsch. $p(\epsilon)$ ist.

- Die Details von $p(\epsilon)$ sind nur für sehr kurze Zeiten $t \gtrsim \tau$ wichtig

$$\boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) = 0}$$

Fokker-Planck-Gleichung

- Superdiffusion

bisher war unsere Annahme, dass

$$\langle \ell^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(\ell)\, \ell^2 \, d\ell$$ existiert

wenn für große ℓ gilt, dass

$$p(\ell) \sim \frac{1}{|\ell|^{1+\mu}} \qquad \mu < 2$$

dann existiert das 2. Moment nicht $\int \frac{\ell^2}{\ell^{1+\mu}} d\ell \to \infty$

Damit die Funktion $p(\ell)$ normierbar ist, muß gelten dass $0 < \mu < 2$

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi N^{1/\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{ikx/N^{1/\mu}} \; \hat{p}\left(k/N^{1/\mu}\right)^N$$

konkretes Beispiel

$$\boxed{p(\ell) = A \, \frac{1}{(1+\ell^2)^{\frac{1+\mu}{2}}}}$$

$A = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\mu/2\right)}$ $\qquad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$

$$\hat{p}(q) \simeq 1 - a_\mu |q|^\mu + \frac{1}{2(2-\mu)} q^2 + \dots$$

$$a_\mu = -2^{-\mu} \frac{\Gamma(-\mu/2)}{\Gamma(\mu/2)} > 0$$

$$\hat{p}(k/N^{1/\mu})^N = \left(1 - a_\mu \frac{|k|^\mu}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{2/\mu}}\right)\right)^N$$

$$\simeq e^{-a_\mu |k|^\mu}$$

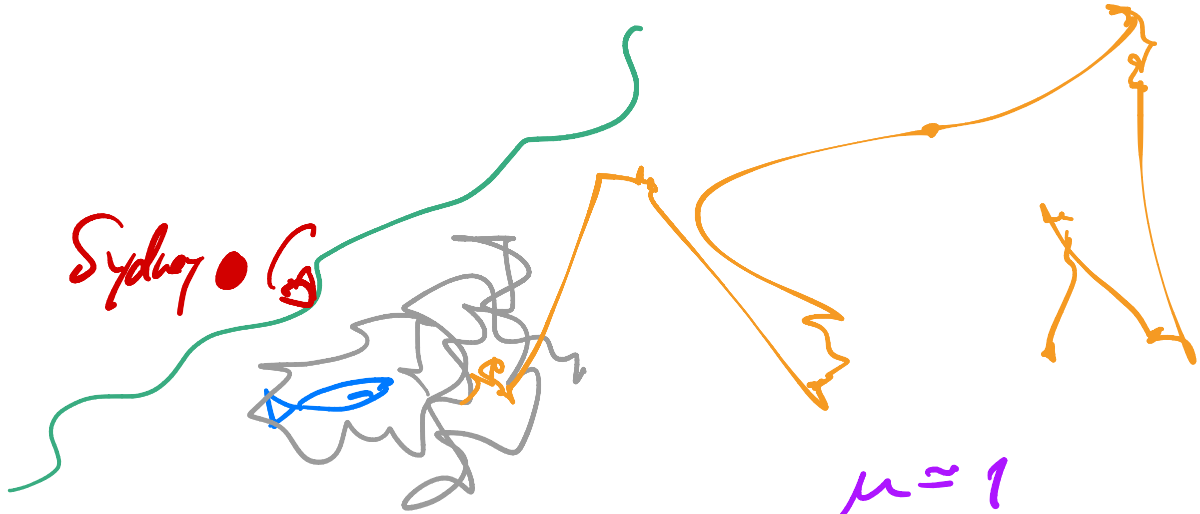
$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi N^{1/\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{ikx/N^{1/\mu}} e^{-a_\mu |k|^\mu}$$

$$N = t/\tau$$

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/\mu} \phi\left(x/x_{typ}(t)\right)$$

$$x_{typ}(t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/\mu}$$

Bewegung ist schneller als die für normale Diffusion $\longrightarrow$ Superdiffusion !!!



$\mu \approx 1$

Paul Lévy → Lévy flights