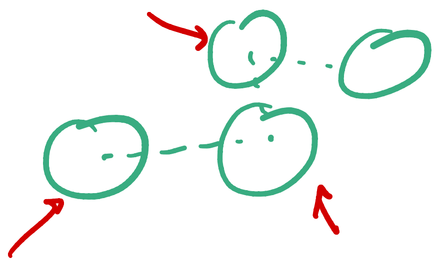
Die Langevin Gleichung

betrachten ein einzelnes Teilchen



u.s.w.

Zufällige Kräfte durch W.W. mit Flüssigkeits-teilchen

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v + \frac{1}{m}\xi(t)$$

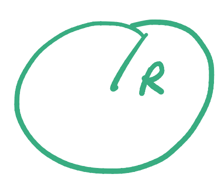
Langevin-Gl. (stochastische DGl.)

$$\langle \xi \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\,\xi(t') \rangle = g\,\delta(t-t')$$

Weißes Rauschen

Reibungskoeff. $\gamma = 6\pi\eta R$

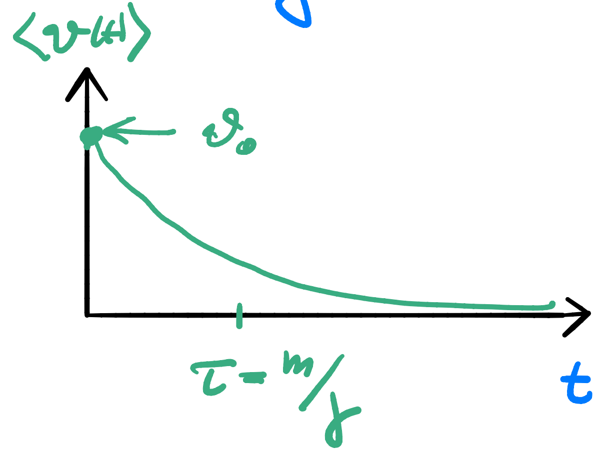


η Viskosität

explizite Lösung der Langevin-Gleichung

$$v(t) = v_0\, e^{-\gamma t/m} + \frac{1}{m}\int_0^t ds\, e^{-\gamma(t-s)/m}\, \xi(s)$$

Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit:



$$\langle v(t)\rangle = v_0\, e^{-\gamma t/m}$$

Diffusion

$$x_{typ}(t) \sim \langle x^2(t)\rangle^{1/2} \sim t^{1/2}$$

$$v_{typ}(t) \sim \frac{x_{typ}(t)}{t} \sim t^{-1/2}$$

Geschwindigkeitskorrelationen:

$$\langle v(t)\, v(t')\rangle = v_0^2\, e^{-\gamma(t+t')/m}$$

$$+ \frac{1}{m^2}\int_0^t ds \int_0^{t'} ds'\, e^{-\gamma(t-s)/m}\, e^{-(t'-s')/m}$$

$$\times \underbrace{\langle \xi(s)\, \xi(s')\rangle}_{g\,\delta(s-s')}$$

$$g \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' \, \theta(t-s)\,\theta(t'-s')\, e^{-\gamma(t-s)/m}\, e^{-\gamma(t'-s')/m}\, \delta(s-s')$$

$$= g \int_0^\infty ds\, \theta(t-s)\,\theta(t'-s)\, e^{-\gamma(t+t'-2s)/m}$$

$$= g \int_0^{\min(t,t')} ds\; e^{-\gamma(t+t'-2s)/m}$$

$$t > t'$$

$$= g\, e^{-\gamma(t+t')/m}\, \frac{m}{2\gamma}\left(e^{2\gamma/m\, t'} - 1\right)$$

$$= \frac{gm}{2\gamma}\, e^{-\gamma(t-t')/m} - \frac{gm}{2\gamma}\, e^{-\gamma(t+t')/m}$$

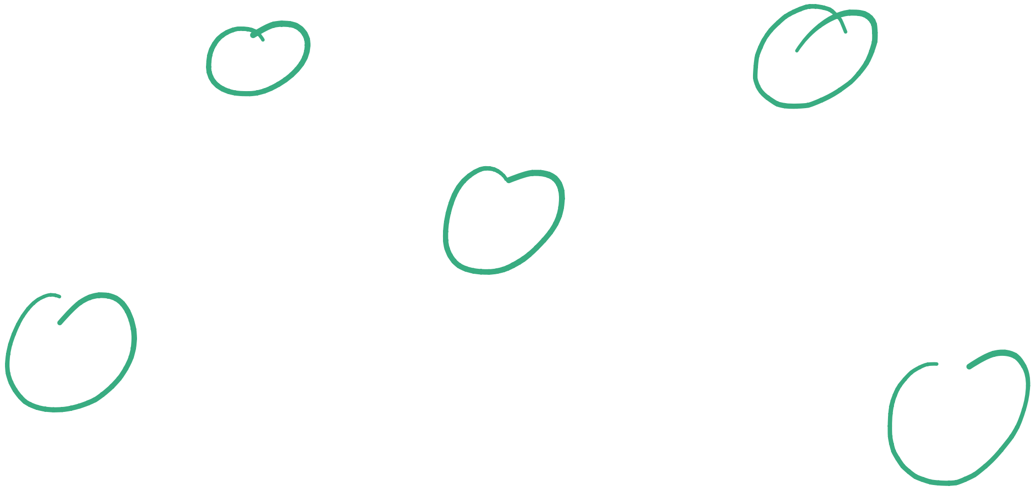
$$\langle v(t)\, v(t')\rangle_\xi = \left(v_0^2 - \frac{g}{2m\gamma}\right) e^{-\gamma(t+t')/m}$$

$$+ \frac{g}{2m\gamma}\, e^{-\gamma(t-t')/m}$$

dies ist die Geschwindigkeitskorrelationsfunktion eines einzelnen Teilchens!

Es ist noch durch den Anfangswert v_0

der Geschwindigkeit dieses Teilchens charakterisiert.



$$\langle v_0^2 \rangle_T = \frac{k_B T}{m} \qquad \text{Equipartitionstheorem}$$

Mittelung über viele Teilchen:

$$\langle\langle v(t)\, v(t') \rangle_\xi \rangle_T = \left(\langle v_0^2 \rangle_T - \frac{g}{2m\gamma} \right) e^{-\gamma(t+t')/m}$$

$$+ \frac{g}{2m\gamma}\, e^{-\gamma|t-t'|/m}$$

Damit das System im Gleichgewicht nur von der relativen Zeit abhängt, muß gelten, dass

$$\frac{g}{2m\gamma} = \langle v_0^2 \rangle_T$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{g = 2\gamma k_B T}$$

Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Stärke des Rauschens (g) und der Dissipation (γ).

Fluktuations-Dissipations-Theorem

- handelt es sich hier wirklich um Diffusion?
- Wenn ja, wie kann man den Diffusionskoeffizienten bestimmen?

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t/m} + \frac{1}{m}\int_0^t ds\, e^{-\gamma(t-s)/m}\, \xi(s)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) \rightarrow \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{m v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right) + \frac{1}{\gamma}\int_0^t ds\left(1 - e^{-\gamma(t-s)/m}\right)\xi(s)$$

$$\langle (x(t)-x_0)^2 \rangle = \frac{m^2}{\gamma^2}\left(v_0^2 - \frac{g}{2m\gamma}\right)\left(1-e^{-\gamma t/m}\right)^2$$

$$+ \frac{g}{\gamma^2}\left(t - \frac{m}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t/m}\right)\right)$$

Nach der Mittelung über unterschiedliche Teilchen mit $\langle v_0^2 \rangle_T = \frac{k_B T}{m}$ folgt:

$$\langle (x(t)-x_0)^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\gamma}\left(t - \frac{m}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t/m}\right)\right)$$

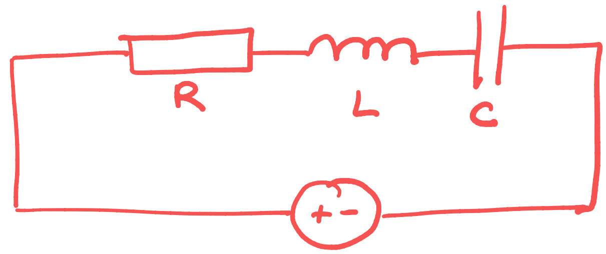
$$t \gg m/\gamma = \tau$$

$$\simeq 2Dt$$

$$\boxed{D = \frac{k_B T}{\gamma}}$$ Diffusionsverhalten

Rauschen in elektrischen Schaltkreisen

LRC



$\langle V_{ext} \rangle = 0$

$$V_R + V_L + V_C = V_{ext} = \xi(t)$$

$$\underset{RI}{\uparrow} \qquad \underset{L\dot{I}}{\uparrow} \qquad \underset{\frac{Q}{C}}{\uparrow}$$

$\dot{Q} = I$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \xi(t)$$

$\rightarrow$ $Q(t)$ abhängig von $\xi(t)$

$\rightarrow$ $I(t)$ $\qquad$ I_0, Q_0

Energie $\qquad E = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{L}{2} I^2$

thermisches Mittel (Equipartitions theorem)

$$\langle Q_0^2 \rangle_T = C\, k_B T$$

$$\langle I_0^2 \rangle_T = \frac{1}{L}\, k_B T$$

$$I(t) \longrightarrow \langle I(t)\, I(t') \rangle = f(t-t', t+t')$$

$$\boxed{g = 4 R\, k_B T}$$

garantiert, dass $\langle I(t)\, I(t') \rangle = f(t-t')$

$\Longrightarrow$ Fluktuations-Dissipations-Theorem!!