


Die Boltzmann Gleichung

Bewegungsgleichung für die Verteilungsfunktion

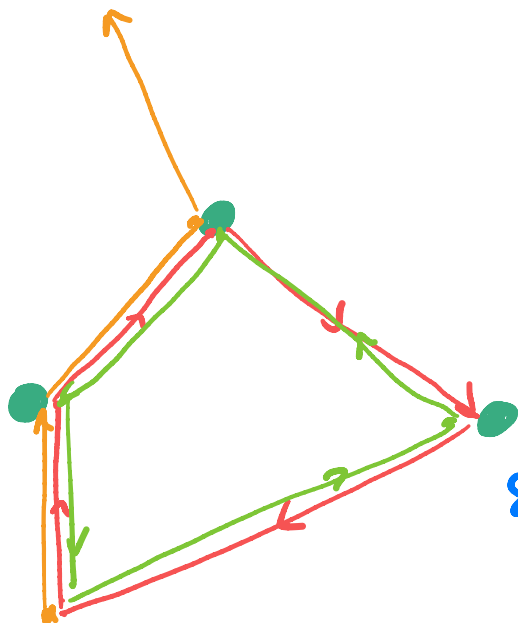
$f_{\vec{k}}(\vec{r}, t)$ dass man ein Teilchen am Ort $\vec{r}$

zum Zeitpunkt t im Impulszustand $\vec{k}$ vorfindet.

So definiert macht das nur Sinn, wenn man klassische Teilchen betrachtet.

Für Quantensysteme :

- betrachten wir Wellenpakete
 Δk : Unbestimmtheit des Impulses



- betrachten dann Längenskalen

$$\gg \Delta x \sim \frac{h}{\Delta k}$$

solche Interferenzeffekte werden dann nicht korrekt beschrieben!

Aus der Wellenfunktion ergeben sich Dichten, Ströme etc.

Ladungsdichte

$$\left(\int_k \dots = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^3} \dots \right)$$

$$\rho(\vec{x}, t) = e \int_k f_k(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = e \int_k \vec{v}_k f_k(\vec{r}, t)$$

Teilchen: Energie - Impuls - Beziehung

$$\begin{aligned} E_{\vec{k}} &= \frac{k^2}{2m} - \mu \\ &= c|\vec{k}| \end{aligned}$$

Gruppengeschwindigkeit

$$\vec{v}_k = \frac{\partial E_k}{\partial \vec{k}}$$

Wechselwirkungen mit elektromagnetischen Feldern:

$$E(\vec{k}) \rightarrow E(\vec{k} - \frac{e}{c} \vec{A}) - e\phi$$

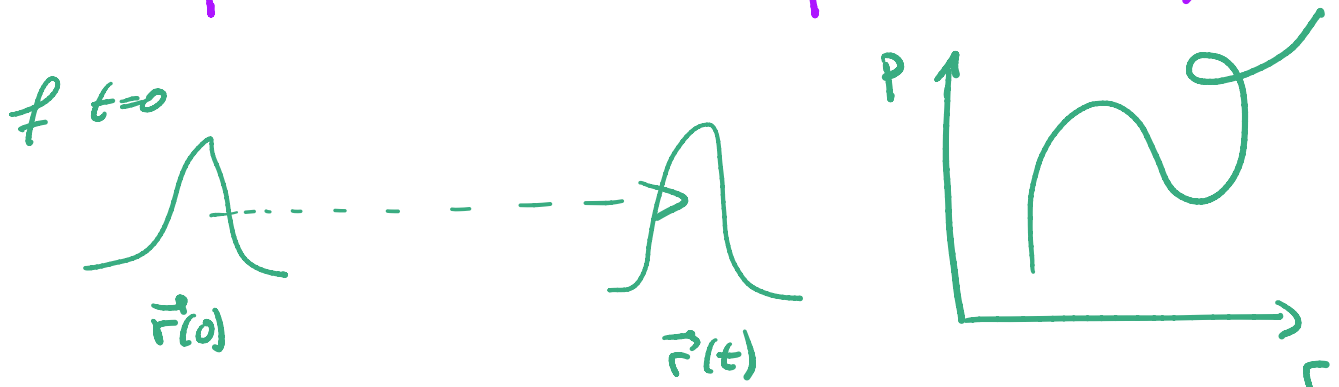
Bewegungsgleichungen von Wellenpaketen
(Ehrenfest)

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (\hbar = 1)}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_k = \frac{\partial E_k}{\partial \vec{k}} ; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = e \vec{E} - \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{B})$$

Was passiert für wechselwirkungs freie Teilchen?

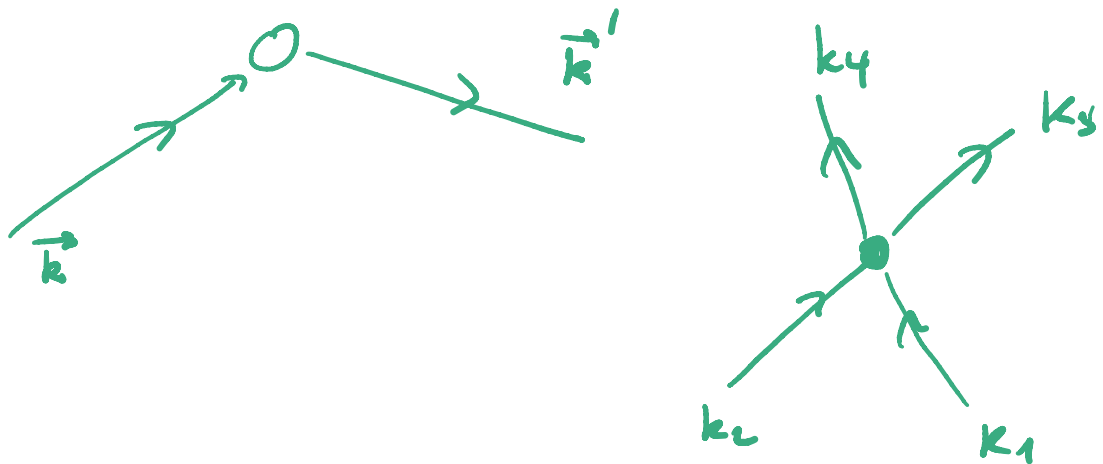
$$f(\vec{k}(t), \vec{r}(t), t) = f(\vec{k}(0), \vec{r}(0), 0)$$



$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$$

es gibt Störprozesse, die aber die Integrität des betrachteten Teilchens nicht zerstören.

→ Schwach wechselwirkende Teilchen



$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{st.} = -C_{k,i,x}[f]$$

↖ Stoßintegral, Kollisionsoperator

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} + \vec{v}_k \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = - C_{k, \vec{r}, t}[f]$$

Streuungen an Verunreinigungen

$$k \leftrightarrow k' \quad W(\vec{k}, \vec{k}') \quad \text{Übergangswahrsch.}$$

$$C = C_{in} + C_{out}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Streuung S. aus dem
 in den Zustand Zustand $\vec{k}$
 $\vec{k}$

betrachten Fermionen f_k w. dass $\vec{k}$ besetzt ist
 $1-f_k$ w. dass $\vec{k}$ unbesetzt ist

$$C_{in}[f] = - \int_{k'} W(k', k) f_{k'} (1-f_k)$$

$$C_{out}[f] = \int_{k'} W(k, k') f_k (1-f_{k'})$$

$$C[f] = - \int_{k'} [W(k', k) f_{k'} (1-f_k) - W(k, k') f_k (1-f_{k'})]$$

Wenn denn flachgewichtet vorliegt, dann sollte die Bedingung der detaillierten Balance gelten

$$W(\vec{k}, \vec{k}') e^{\epsilon_{k'}/k_B T} = W(\vec{k}', \vec{k}) e^{\epsilon_k/k_B T}$$

Im Fall von elastischen Potentialen $\epsilon_k = \epsilon_{k'}$

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k})$$

Im Gleichgewicht: $f_{\vec{k}, \vec{r}, t} = f_{\vec{k}, \vec{r}}$

erwarten: $f_{\vec{k}}^{(0)} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} + 1}$

$$e^{\beta \epsilon_k} f_k^{(0)} = 1 - f_k^{(0)}$$

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1 - e^x + e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[f^{(0)}] &= - \int_{\mathbf{k}} \underbrace{(W(k', k) e^{\beta \epsilon_k} - W(k, k') e^{\beta \epsilon_{k'}})}_0 f_k^{(0)} f_{k'}^{(0)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wenn kein externes Feld anliegt, dann ist die F.D. Verteilung eine Lösung der Boltzmann-Gleichung!

Liegen externe Felder an, dann muß sich die Verteilungsfunktion ändern (vgl. zur F.D. Verteilung)

• Für elastische Streuung gilt $W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k})$
$$e_k [f] = - \int_{k'} W(k, k') (f(k') - f(k))$$

Isotrope Streuung:

unabh. von
 k, k'

$$W(k, k') = \frac{2\pi}{h} W_0 \delta(\epsilon_k - \epsilon_{k'})$$

Entropieproduktion und H-Theorem

Verteilungsfunktion $\rightarrow$ Entropie

$$f_k(\vec{r}, t) \rightarrow S(t)$$

Entropiedichte:

$$S_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = -k_B \left(f_k(\vec{r}, t) \log f_k(\vec{r}, t) + (1 - f_k(\vec{r}, t)) \log (1 - f_k(\vec{r}, t)) \right)$$

Gesamte Entropie:

$$S(t) = \int_{\vec{r}, \vec{k}} S_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \int d^d \vec{r} \frac{d^d \vec{h}}{(2\pi)^d} S_{\vec{k}}(\vec{r}, t)$$

Entropieproduktion:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$Q = -k_B \int_{\vec{r}, \vec{h}} \log \left(\frac{f_k(\vec{r}, t)}{1 - f_k(\vec{r}, t)} \right) \frac{\partial f_k}{\partial t}$$

$$= k_B \int_{\vec{r}, \vec{k}} \left(\dot{\vec{k}} \cdot \nabla_k f + \dot{\vec{v}} \cdot \nabla_r f \right) \log \left(\frac{f}{1-f} \right) \\ + k_B \int_{\vec{h}, \vec{r}} C_k[f] \log \left(\frac{f}{1-f} \right)$$

$$(\nabla_k f_k) \cdot \ln \frac{f_k}{1-f_k} = -\frac{1}{k_B} \nabla_k S_k(\vec{r}, t)$$

$$\int_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \nabla_k f \log \frac{f}{1-f} = -\frac{1}{k_B} \int_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \nabla_k S_k$$

$$= \frac{1}{k_B} \int_{\vec{k}} S_k \left(\frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} k_\alpha \right) - \frac{1}{k_B} \int_{\partial k} S_k \vec{k} \cdot \vec{n}$$

$$= 0$$

$$\int_r \vec{v} \cdot \nabla_r f \log \frac{f}{1-f} = -\frac{1}{k_B} \int_r \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r S_k$$

$$= + \frac{1}{k_B} \int_r \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k_\alpha}}_0 \cdot S_k - \frac{1}{k_B} \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} S$$

↑
entropisch
durch die
Oberfläche!

Entropieänderungen sind eine Konsequenz von
Stoßprozessen

$$Q = k_B \int_{\vec{k}, \vec{x}} C_k[f] \log \left(\frac{f_k}{1-f_k} \right)$$

