Lösung der Boltzmann Gleichung
(die Relaxationszeit näherung)

Boltzmann Gl.

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e\vec{E}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{k}} + \vec{v}_k \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = -\mathcal{C}_k[f]$$

Streuung an Verunreinigungen

$$\mathcal{C}_k[f] = -\int_{k'} W(\vec{k},\vec{k}')\,(f_{k'} - f_k)$$

Linearisieren die Verteilungsfunktion bzgl. kleiner Abweichungen vom Gleichgewicht.

$$f_k(\vec{r},t) \cong f_k^{(0)} + \underbrace{\delta f_k(\vec{r},t)}_{\mathcal{O}(E)}$$

Gleichgewichtsverteilung

$$f_k^{(0)} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}$$

Annahme $\quad W(k,k') \simeq W$

$$f_k - f_{k'} \simeq \underbrace{f_k^{(0)} - f_{k'}^{(0)}}_{=0} + \delta f_k - \delta f_{k'}$$

i) $f_k^{(0)}, f_{k'}^{(0)}$ hängen nur von der Energie $\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}$ ab

ii) bei elastischer Streuung gilt, dass $\varepsilon_k = \varepsilon_{k'}$

iii) $n = \int_k f_k = \int_k f_k^{(0)} + \underbrace{\int_k \delta f_k}_{=0}$

$$\Longrightarrow \boxed{C_k[f] = -\frac{1}{\tau}\,\delta f_k}$$

entspricht der Relaxationszeitnäherung

Im Gleichgewicht gilt $C_k[f^0] = 0$

$\Longrightarrow$ ein linearisiertes Stoßintegral muss die Form haben

$$C_k[f] = \int_{k'} w(k,k')\,\delta f_{k'}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} - e\vec{E}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial \vec{k}} + \vec{v}_k\cdot\frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}} = -\frac{1}{\tau}\,\delta f_k$$

Bsp. kein elektrisches Feld, homogenes System

$$f_k = f_k^{(0)} + \delta f_k(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial \delta f_k}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}\,\delta f_k \Rightarrow \delta f_k(t) = \delta f_k(0)\,e^{-t/\tau}$$

linearisierte B. Gl. im homogenen Fall

$$\frac{\partial \delta f_k}{\partial t} - e\vec{E}\cdot\vec{v}_k\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k} = -\frac{1}{\tau}\,\delta f_k$$

(Annahme: $\vec{E}(t) = \vec{E}_0\,e^{-i\omega t}$

$$\Longrightarrow \delta f_k(t) = \delta f_k\,e^{-i\omega t}\;)$$

$$\delta f_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{-i\omega t}\,\delta f_k(t)$$

$$-i\omega\,\delta f_k(\omega) - e\vec{E}(\omega)\cdot\vec{v}_k\,\frac{\partial f_k}{\partial \varepsilon_k} = -\frac{1}{\tau}\,\delta f_k(\omega)$$

$$(\tau^{-1} - i\omega)\,\delta f_k(\omega) = e\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_k}$$

$$\boxed{\delta f_k = \frac{e\tau}{1-i\omega\tau}\,\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k}\,\vec{E}\cdot\vec{v}_k}$$

Bestimmung des elektrischen Stromes:

$$j_\alpha(t) = \int dt'\,\sigma_{\alpha\beta}(t-t')\,E_\beta(t')$$

$$j_\alpha(\omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\omega)\,E_\beta(\omega)$$

$$j_\alpha(t) = -e\int_k \vec{v}_k\,f_k(t) = -e\int_k \vec{v}_k\left(f_k^{(0)} + \delta f_k(t)\right)$$

Wenn $\varepsilon_k = \varepsilon_{-k} \Rightarrow \vec{v}_k = -\vec{v}_{-k}$

$$j_\alpha(t) = -e\int_k v_{k\alpha}\,\delta f_k(t)$$

$$j_\alpha(\omega) = -e\int_k v_{k\alpha}\,\delta f_k(\omega)$$

$$= \frac{e^2\tau}{1-i\omega\tau}\int_k v_{k\alpha}\left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k}\right) v_{k\beta}\,E_\beta(\omega)$$

frequenzabhängige elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{e^2\tau}{1-i\omega\tau} \underbrace{\int_k v_{k,\alpha} v_{k\beta} \left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k}\right)}_{A_{\alpha\beta}}$$

Bestimmung des Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$:

$$v_{k,\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial k_\alpha} \Rightarrow \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k} \cdot \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial k_\alpha} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial k_\alpha}$$

$$A_{\alpha\beta} = -\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial k_\alpha} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial k_\beta} = \underbrace{\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} f^{(0)}(\varepsilon_k)}_{n} \frac{\partial^2 \varepsilon_k}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \sigma_{\beta\alpha}(\omega)$$

Bsp. $\varepsilon_k = \frac{k^2}{2m}$ $\qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_k}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{m}$

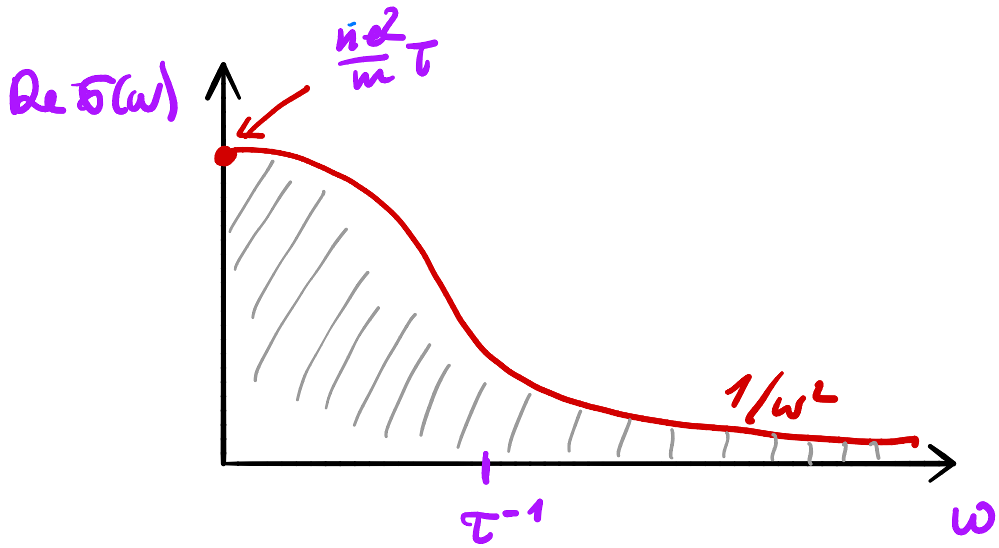
$$A_{\alpha\beta} = \frac{n}{m} \delta_{\alpha\beta}$$

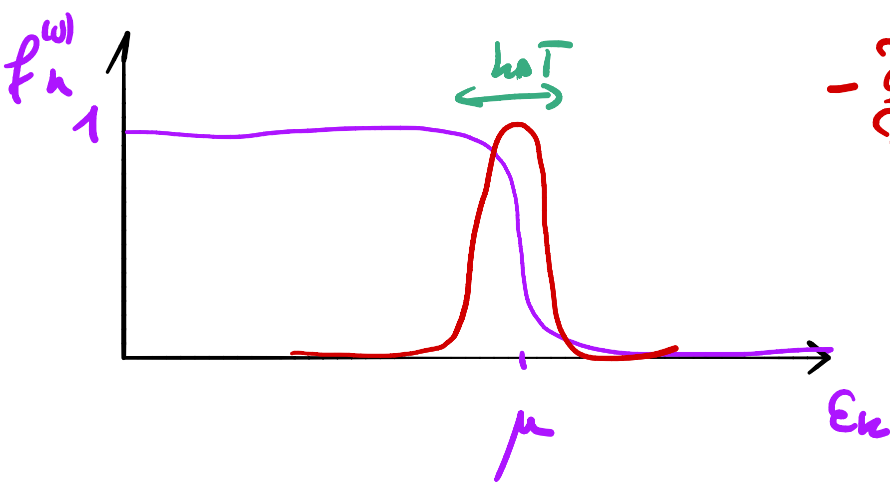
$$\boxed{\sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\, \sigma(\omega) \; ; \; \sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\tau}{1-i\omega\tau}}$$

(Paul Drude) Drude Leitfähigkeit

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\,\frac{\tau}{1+(\omega\tau)^2}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\,\sigma(\omega)\,d\omega = \frac{ne^2}{m}\frac{\pi}{2}$$





$$-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} \xrightarrow{T\to 0} \delta(\varepsilon_k - \mu)$$

$$A_{\alpha\beta} = \int_k v_{k,\alpha}\, v_{k\beta} \left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k}\right)$$

$$= \frac{v_F^2}{3} \int_k \left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k}\right)$$

$$= \frac{v_F^2}{3} \int d\varepsilon\, g(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\right)$$

$$g(\varepsilon) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sqrt{2}\, m^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$$

$$A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{v_F^2}{3} g(\varepsilon_F) \qquad g(\varepsilon_F) = \frac{1}{2\pi^2} m k_F$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2\pi^2} \frac{k_F^3}{3m}$$

$$n = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_0(k) \Big|_{T=0} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{3} k_F^3$$

$$\underline{A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{n}{m}}$$

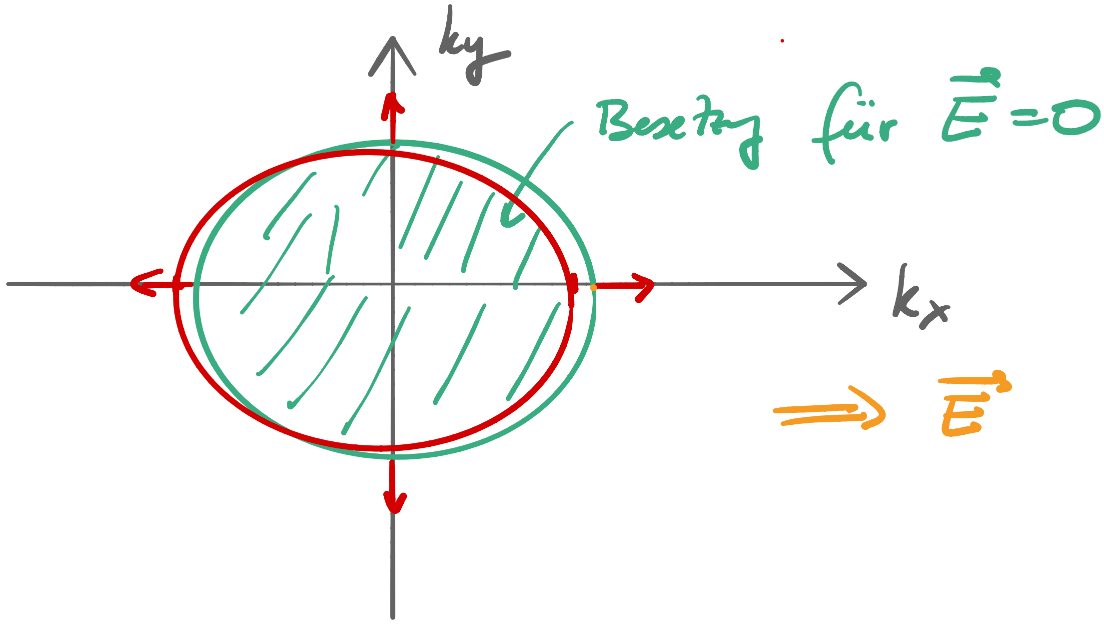
Interpretation der Verteilungsfunktion:

$$\delta f_k = e\tau \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k} \vec{E} \cdot \vec{v}_k$$

gesamte Verteilungsfunktion:

$$f_k = f_k^{(0)} + e\tau \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon_k} \vec{E} \cdot \vec{v}_k + \mathcal{O}(E^2)$$

$$= f^{(0)}(\varepsilon_k + e\tau \vec{E} \cdot \vec{v}_k) + \mathcal{O}(E^2)$$



$$\epsilon_k + e\tau\,\vec{E}\cdot\vec{v}_k < 0$$

entspricht den besetzten Zuständen im Elektrischen Feld

$\vec{E} \parallel \vec{x}$

Im elektrischen Feld kommt es zu einer Verschiebung der gesamten Fermikugel in Feldrichtung. Dabei werden insbesondere Zustände in der Nähe der Fermienergie in ihrem Besetzungszustand verändert.