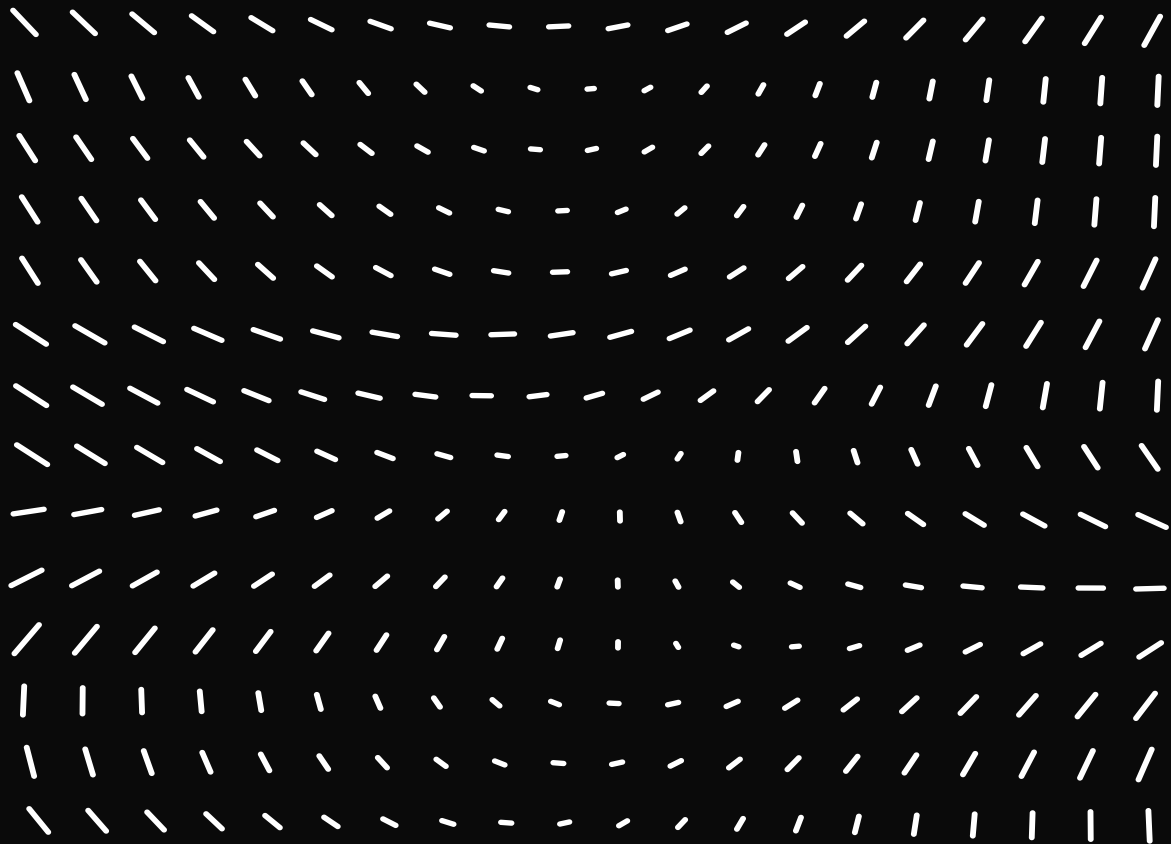


# Statistische Physik Theo Fb

Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 05: Spin-Statistik Theorem /  
Zustandssumme des idealen Quantengases



# Ideale Quantengase

„Quantenstatistik“:

Austauschsymmetrie d. Wellenfunktion

→ „Ununterscheidbarkeit“ v. Teilchen

→ Abzählen d. Zustände

## Spin-Statistik Theorem

$$\text{Sei } \hat{H} \psi_a = \varepsilon_a \psi_a$$

$\hat{H}$ ... ein-Teilchen Hamiltonoperator

$\psi_a$ ... Eigenfunktion zum EW  $\varepsilon_a$

betrachte nun zwei Teilchen, die sich in Zuständen  $\psi_a$  und  $\psi_b$  befinden

es gäbe keine Wechselwirkung zw. den Teilchen („ideal“)

$$\Rightarrow \hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}(1) + \hat{H}(2)$$

$$\Psi(12) = \alpha \psi_a(1) \psi_b(2) + \beta \psi_a(2) \psi_b(1)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  welche Werte haben  $\alpha, \beta$ ?

$\bar{\Psi}(12)$  ist Eigenfkt. von  $\hat{H}_{\text{tot}}$ :

$$\hat{H}_{\text{tot}} \bar{\Psi}(12) = (\hat{H}(1) + \hat{H}(2)) \bar{\Psi}(12) = (\epsilon_a + \epsilon_b) \bar{\Psi}(12)$$

Austauschoperator:  $\hat{P}: 1 \leftrightarrow 2$

$$\hat{P} \bar{\Psi}(12) = \bar{\Psi}(21)$$

$$\text{es gilt: } [\hat{H}_{\text{tot}}, \hat{P}] = 0$$

$\Rightarrow$  es gibt gleichzeitige Eigenfunktionen von  $\hat{H}_{\text{tot}}$  und  $\hat{P}$

$$\text{Sei } \hat{P} \bar{\Psi}_\lambda(12) = \lambda \bar{\Psi}_\lambda(12)$$

nochmaliges Anwenden von  $\hat{P}$  mit  $\hat{P}^2 = \mathbb{1}$ :

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \hat{P} \bar{\Psi}_\pm(12) &= \hat{P} \left( \alpha \psi_a(1) \psi_b(2) + \beta \psi_a(2) \psi_b(1) \right) = \\
 &= \alpha \psi_a(2) \psi_b(1) + \beta \psi_a(1) \psi_b(2) \\
 &= \lambda \left( \alpha \psi_a(1) \psi_b(2) + \beta \psi_a(2) \psi_b(1) \right)
 \end{aligned}$$

Eigen fkt.  
von  $\hat{H}_{tot}$  →

$$\Rightarrow \alpha = \lambda \beta, \text{ mit } \lambda = \pm 1 \Rightarrow \underline{\alpha = \pm \beta}$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{\Psi}_\pm(12) = \gamma \left( \psi_a(1) \psi_b(2) \pm \psi_a(2) \psi_b(1) \right)}$$

+ ... symmetrische Wellenfkt.

- ... antisymm. Wellenfkt.

## Spin-Statistik Theorem

- ) Teilchen mit halbzahligem Spin:  
(Fermionen): antisymm. Wellenf.
- ) Teilchen mit ganzzahligem Spin:  
(Bosonen): symmetrische Wellenf.



Fermionen: Elektronen, Protonen, Neutronen  
 $S = \frac{1}{2}$

Bosonen: Photonen ( $S=1$ ), Higgs ( $S=0$ )

•) Verallgem. für beliebige Teilchenzahl:

$$\hat{P}_{\nu\mu} \psi_{\pm}(1 \dots \nu \dots \mu \dots N) = \\ = \psi_{\pm}(1 \dots \mu \dots \nu \dots N) = \pm \psi(1 \dots \nu \dots \mu \dots N)$$

•) Pauli-Prinzip für Fermionen

betr. identische Teilchen:

$$a=b: \psi_{-}(12) = \gamma (\psi_a(1)\psi_a(2) - \psi_a(2)\psi_a(1)) \\ \equiv 0$$

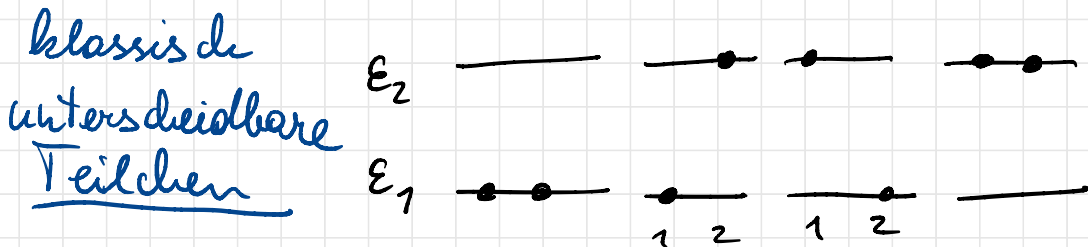
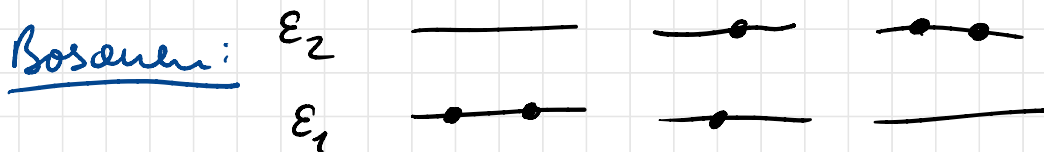
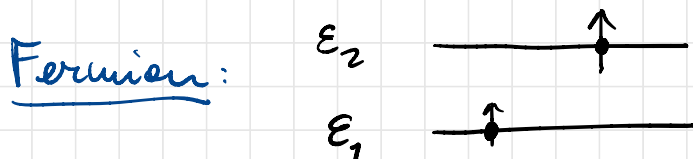
→ für Fermionen kann jeder Zustand maximal 1-fach besetzt sein

z.B.: wichtig f. Elektronen in Atomhülle

⇒ Unterschiedliche Abzählung der Zustände für Fermionen/Bosonen.

•) Austauschsymmetrie  $\Leftrightarrow$   
Unterscheidbarkeit

Bsp.: 2 Teilchen, 2 Energieniveaus  
 erlaube nur Spin  $\uparrow$



$$z_{\text{Fermi}} = e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

$$z_{\text{bos}} = e^{-2\beta\epsilon_1} + e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + e^{-2\beta\epsilon_2}$$

$$z_{\text{kl.}} = e^{-2\beta\epsilon_1} + 2e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + e^{-2\beta\epsilon_2}$$

## Zustandssumme f. ideales Quantengas

betrachte System mit Energie-Eigenwerten  $\epsilon_i$

↗  
können auch entartet sein  
z.B.: Spin ↑ und ↓ können gleichen  
Energie EW haben

$n_i$  ... Besetzungszahl: Anzahl der  
Teilchen im Zustand  $i$

Mikrozustand ist festgelegt durch  
Angabe aller  $(n_i) = (n_0, n_1, n_2, \dots)$

Teilchenzahl im Mikrozust.  $r$ :

$$N_r = \sum_i n_i$$

Energie: 
$$E_r = \sum_i n_i \epsilon_i$$

Fermionen: Pauli-Prinzip:

$$n_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Fermi-Dirac Statistik  
(FD)

Bosonen:

$n_i = 0, 1, 2, \dots$  Bose-Einstein Stat.  
(BE)

am einfachsten: Großkanonische Zustands =  
Summe

-) Teilchenzahl nicht fest, aber  $N = \overline{N}_k$  durch  
das chem. Potential  $\mu$  vorgeg.

-) Energie  $E = \overline{E}_k$  durch  $T$  vorgeg.

$$\begin{aligned} Y &= \sum_k e^{-\beta(E_k - \mu N_k)} \\ &= \sum_{\{n_i\}} e^{-\beta \sum_i n_i (\epsilon_i - \mu)} = \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)} \end{aligned}$$

$\sum_{\{n_i\}}$  ... Summe über das Set aller möglichen Kombinationen von Besetzungszahlen

$$Y = \sum_{\{n_i\}} e^{-\beta n_0 (\epsilon_0 - \mu)} e^{-\beta n_1 (\epsilon_1 - \mu)} e^{-\beta n_2 (\epsilon_2 - \mu)} \dots$$

$$= \prod_i \underbrace{\sum_{n_i=0}^{n_{\max}} e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)}}_{n_{\max} = \begin{cases} 1 & \text{FD} \\ \infty & \text{BE} \end{cases}}$$

$\epsilon_i$  ... großgeschriebener Zust.-S. für das Niveau  $i$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Y_{\text{FD}} &= \prod_i (1 + e^{-\beta (\epsilon_i - \mu)}) \\ Y_{\text{BE}} &= \prod_i (1 - e^{-\beta (\epsilon_i - \mu)})^{-1} \end{aligned}}$$

← geometr. Reihe

$$\sum_{e=0}^{\infty} q^e = \frac{1}{1-q}$$

BE: damit die Reihe für alle  $i$  konvergieren, muss gelten

$$e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} < 1 \quad \forall i \quad \text{oder}$$

$$\mu < \min_i \epsilon_i = \epsilon_0 \quad \text{BE}$$

↑  
Grundzustand

Großkanon. Potenzial:

$$J(V, T, \mu) = -kT \ln Y$$

$$J_{FD} = kT \sum_i \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)})$$

$$J_{BE} = -kT \sum_i \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)})$$

es gilt:  $J = VP \Rightarrow P(V, T, \mu) = \frac{J}{V}$

$$N = - \frac{\partial J}{\partial \mu} = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \mp 1} \quad (*) \quad \begin{pmatrix} - BE \\ + FD \end{pmatrix}$$


---

$$E = - \frac{\partial \ln Y}{\partial \beta} = \sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \mp 1} \quad (**)$$


---

•) System durch 2 Parameter festgelegt:  
 $(\mu, T) \Leftrightarrow (E, N)$

•) Vergleiche (\*) und (\*\*) mit  
 $N_n = \sum_i n_i, \quad E_n = \sum_i n_i \epsilon_i$

$$N = \overline{N_n} = \overline{\sum_i n_i} = \sum_i \overline{n_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{n_i} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \mp 1}} \quad \begin{matrix} - BE \\ + FD \end{matrix}$$

analog:  $E = \sum_i \overline{n_i} \epsilon_i \quad \Leftrightarrow (**)$

mittleren Besetzungszahl. des EN  $\epsilon_i$

expliziter Beweis:

$$\bar{n}_i = \sum_n P_n n_i^{(n)} = \frac{1}{Y} \sum_{\{n_j\}} n_i e^{-\beta n_j (\epsilon_j - \mu)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\prod_j \sum_{n_j=0}^{n_{\max}} n_i e^{-\beta n_j (\epsilon_j - \mu)}}{\prod_j \sum_{n_j=0}^{n_{\max}} e^{-\beta n_j (\epsilon_j - \mu)}} \\ &= \frac{\sum_{n_i=0}^{n_{\max}} n_i e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)}}{\sum_{n_i} e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)}} \end{aligned}$$

alle Terme  
außer  $j=i$   
kürzen sich  
weg

$$n_{\max} = \begin{cases} 1 & \text{FD} \\ \infty & \text{BE} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{\text{FD: } \bar{n}_i} = \frac{e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} = \underline{\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}}$$

(FD)



$$\underline{\text{BE:}} \quad \bar{n}_i = \underbrace{\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}\right)}_{\text{geom. Reihe für}} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} e^{-\beta n (\epsilon_i - \mu)}}_{\text{Nenner}}$$

geom. Reihe für  
Nenner

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \underbrace{\sum_n e^{-\beta n (\epsilon_i - \mu)}}_1$$

$$\frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}$$

$$\underline{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}}$$

(BE)