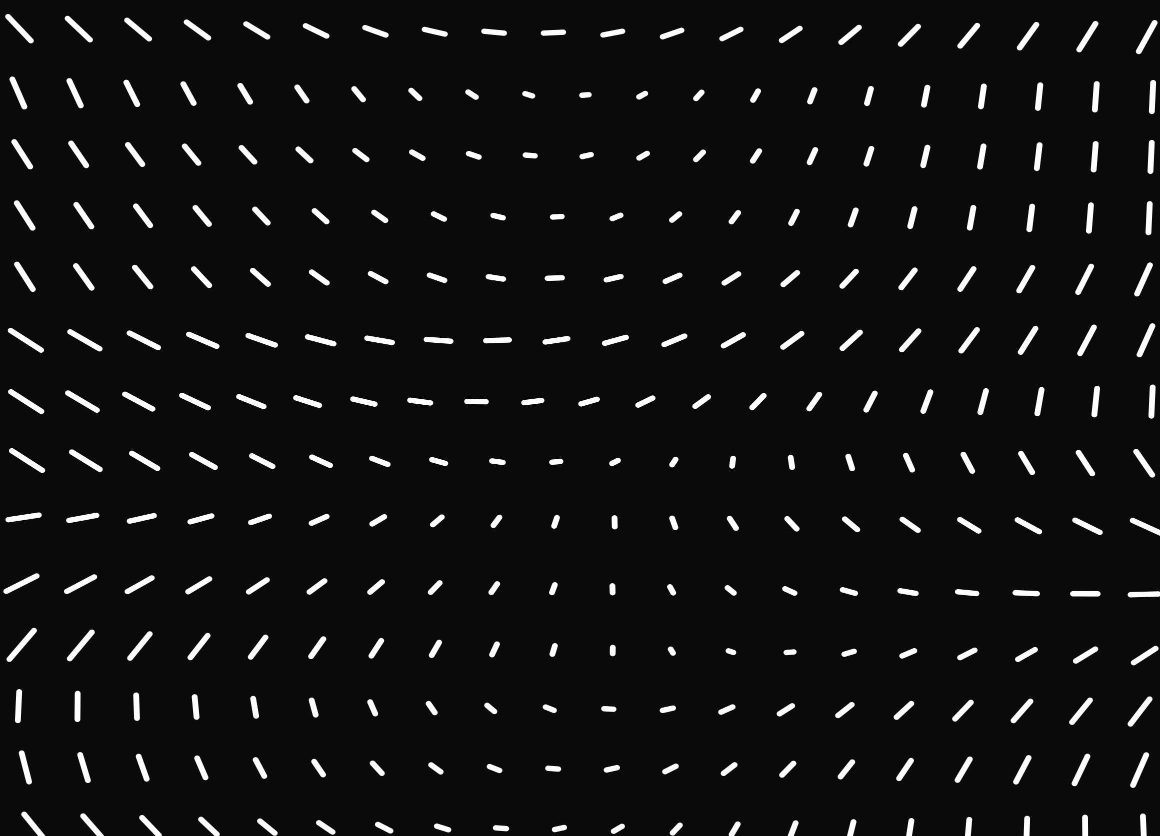
Statistische Physik Theo Fb

Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 06: Ideales Quantengas II
Limes kleiner Besetzungszahlen



Ideales Quantengas – Forts.

mittlere Besetzungszahlen:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \mp 1}$$

Bosonen (–) (BE)

Fermionen (+) (FD)

$$N = \sum_i \bar{n}_i \quad , \quad E = \sum_i \varepsilon_i \bar{n}_i$$

Limes kleiner Besetzungszahlen

sei $\bar{n}_i \ll 1$ für alle i

$$\Rightarrow e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \gg 1 \Rightarrow$$

$$\bar{n}_i \approx e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}$$ Maxwell-Boltzmann (MB)

für $\varepsilon_i = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$ $\Rightarrow$ Maxwellsche Geschwindigkeitsvert.

⇒ Unterschied zw. Fermionen und Bosonen verschwindet für $\bar{n}_i \ll 1$

$$N = e^{\mu\beta} \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} = e^{\mu\beta} Z_1$$

ein-Teilchen kanon. Zustandssumme

$e^{\mu\beta} \equiv z$ ... Fugizität

$$e^{\mu\beta} = \frac{N}{Z_1} \Rightarrow \bar{n}_i = N \frac{e^{-\beta\varepsilon_i}}{Z_1} = N P_i$$

chemisches Pot. durch N eliminiert

Wahrscheinl. im kanon. Ensemble

berechne kanon. Zustandssumme

$$\left.\begin{aligned} J &= F - \mu N, \\ J &= -kT \ln Y \\ F &= -kT \ln Z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\ln Z = \ln Y - \beta\mu N$$

allg. Erg. f. id. Quantengas

$$= \mp \sum_j \ln\left(1 \mp e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)}\right) - \mu\beta N$$

Limes $\bar{n}_i \ll 1$, $e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \ll 1 \Rightarrow$

$$\ln Z \approx \underbrace{\sum_j e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}_{N} - N \ln \frac{N}{Z_1}$$

$$= N - N \ln \frac{N}{Z_1} = -\underbrace{(N \ln N - N)}_{\approx \ln N!} + N \ln Z_1$$

$$\Rightarrow \boxed{Z \approx \frac{1}{N!} Z_1^N}$$

- für $\bar{n}_i \ll 1$ folgt $Z_{BE}, Z_{FD} \to Z_{MB} = \frac{1}{N!} Z_1^N$
- Herleitung des $\frac{1}{N!}$ Faktors

$\Rightarrow$ eine Folge der Quantenstatistik $\to$ „Ununterscheidbarkeit" d. Teilchen

•) für Teilchen in Kasten („id. Gas")
gilt $\varepsilon_0 \approx 0 \Rightarrow e^{-\beta\varepsilon_0} \approx 1$

$$\overline{n_i} = \frac{N}{Z_1} e^{-\beta\varepsilon_i} \ll 1 \quad \forall\ i$$

$$\Rightarrow \frac{N}{Z_1} = e^{\mu\beta} \ll 1$$

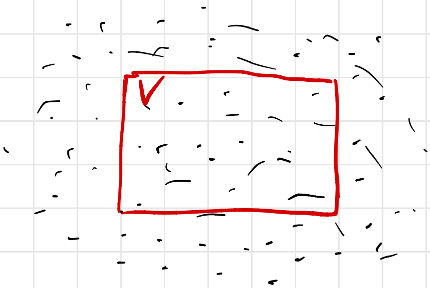
klass. Limes: $Z_1 = Z_{trans} = \frac{V}{\lambda^3}$

$$\frac{N}{Z_1} = N\frac{\lambda^3}{V} \ll 1 \quad \text{od.} \quad \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \lambda$$

$\Rightarrow$ klass. Limes $\hat{=}$ Limes kleiner Besetzungszahlen

Freies ideales Quantengas

„frei": Volumen nicht eingeschränkt
bzw. „sehr groß"



$\Rightarrow$ Impulse und Energie nicht quantisiert sind

„frei" $\Leftrightarrow$ Kontinuumslimes

Bsp.: $\varepsilon(p) \begin{cases} \frac{\vec{p}^2}{2m} & \text{nicht relat. Teilch.} \\ c|\vec{p}| & \text{masselose Teilchen} \end{cases}$

$\varepsilon \propto |\vec{p}|^n$

$$\Rightarrow \sum_i \rightarrow g \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \xrightarrow{\varepsilon(|\vec{p}|)} g \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp\, p^2$$

g ... Entartung der Energieniveaus
z.B.: Spin: $g = (2s+1)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} N &= g\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty dp\,\frac{p^2}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\mp 1} \\ E &= g\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty dp\,\frac{p^2\,\varepsilon(p)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\mp 1} \end{aligned}}$$

$$J = \mp g\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\, kT \underbrace{\int_0^\infty dp\, p^2 \ln\left(1\mp e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right)}_{\text{part. Integr.}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}p^3 \ln(\quad)\Big|_0^\infty \mp \frac{\beta}{3}\int_0^\infty dp\,\frac{p^3\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\mp 1}$$

$$J = g\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{n}{3}\int_0^\infty dp\,\frac{p^2\,\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\mp 1} = \frac{n}{3}E$$

mit $\varepsilon \propto p^n \Rightarrow \frac{\partial\varepsilon}{\partial p} = n\frac{\varepsilon}{p}$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{J}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{n}{3}\frac{E}{V}}$$

nicht-relat. Teilchen

$n = 2$: $\quad p = \frac{2}{3}\frac{E}{V}$

klass. id. Gas:
$pV = NkT$
$E = \frac{3}{2} NkT$

masselose Teilchen

$n = 1$: $\quad p = \frac{1}{3}\frac{E}{V}$

Anwendung:

Quantenkorrektur zu klass. id. Gas

- niedrige Besetzungszahlen (verdünntes Gas)
- nichtrelativist. Teilchen: $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$

(UE)

Entwicklung in $e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \ll 1$

$$\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \mp 1} \approx e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \frac{1}{1 \mp e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}$$

$$\approx e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \mp e^{-2\beta(\varepsilon-\mu)}$$

1. Ordnung:

$$N = g \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \overset{e^{\beta\mu}}{z} \int_0^\infty dp\, p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} = g \frac{V}{\lambda^3} z$$

$$E = g \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} z \int_0^\infty dp \frac{p^4}{2m} e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} = \frac{3}{2} Nk_BT$$

2 Ordnung:

$$\Rightarrow N \approx g \frac{V}{\lambda^3} \left(z \pm \frac{z^2}{2^{3/2}} \right)$$

$$E \approx \frac{3}{2} k_BT g \frac{V}{\lambda^3} \left(z \pm \frac{z^2}{2^{5/2}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{E}{N} \simeq \frac{3}{2} kT \left(1 \mp \frac{z}{2^{5/2}}\right)$$

in führender Ordn.: $z \simeq \frac{\lambda^3 N}{g V}$

$$v \equiv \frac{V}{N}$$

$$\Rightarrow E \simeq \frac{3}{2} NkT \left(1 \mp \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{g v}\right)$$

mit $P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} \Rightarrow$

$$PV \simeq NkT \left(1 \mp \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{g v}\right)$$

$\Rightarrow$ Quantenkorrekturen zum id. Gas!

- •) praktische Bedeutung gering $\rightarrow$ i.d.R. dominieren Korrekturen von Wechselwirkungen (z.B. Van d. Waals)
- •) „Quantengas" reicht Entwickl. nicht (z.B. Elektronengas im Metall)

Anwendung: •) relativistische Teilchen

(masselos) $mc^2 \ll kT$

•) chemische Potential verschwindet $\mu = 0$

Photongas, Teilchenplasma im frühen Universum

$\varepsilon = cp, \ \mu = 0$:

$$N = g \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp \, \frac{p^2}{e^{\beta cp} \mp 1}$$

$$E = g \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \, c \int_0^\infty dp \, \frac{p^3}{e^{\beta cp} \mp 1}$$

(VE)

$$\boxed{\Rightarrow \left(\frac{N}{V}\right)_{BE} = \rho_{BE} = g \, \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \qquad \left(\frac{E}{V}\right)_{BE} = g \, \frac{\pi^2}{30} \, \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}}$$

$\zeta(3) \approx 1.2\ldots$

FD:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{FD} &= \frac{3}{4}\,\rho_{BE} \\ \left(\frac{E}{V}\right)_{FD} &= \frac{7}{8}\left(\frac{E}{V}\right)_{BE} \end{aligned}}$$

einzige dimensionsbehaftete Größe: T

$$\left[\frac{N}{V}\right] \ldots [\text{Länge}]^{-3} \propto T^3 \qquad \left[\frac{k T}{\hbar c}\right] = [\text{Länge}]^{-1}$$

$$\left[\frac{E}{V}\right] \ldots \frac{\text{Energie}}{[\text{Länge}]^{-3}} \propto T^4$$