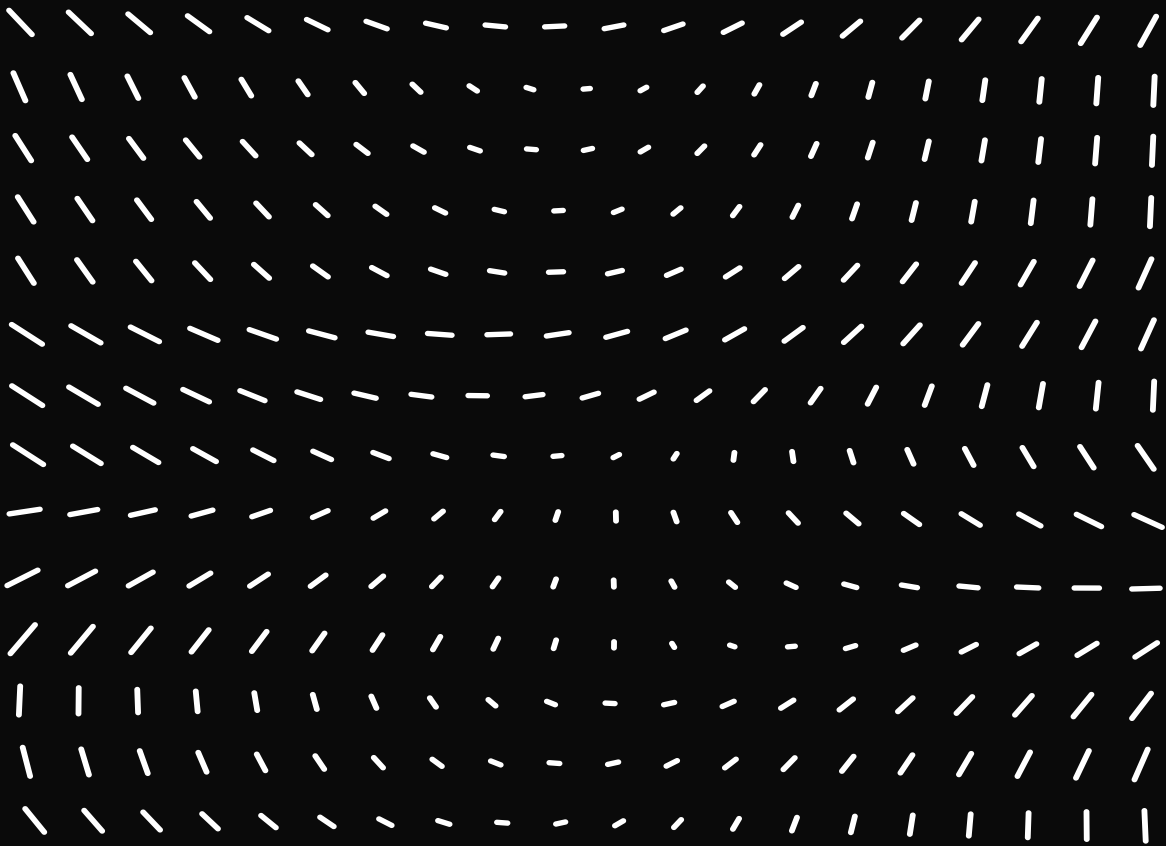


Statistische Physik Theo Fb

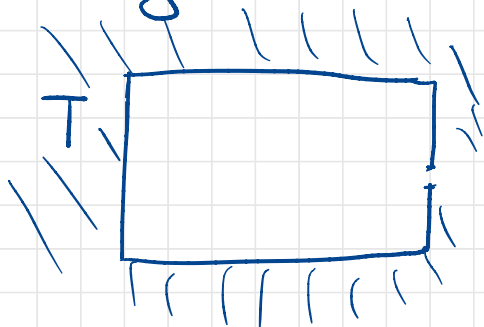
Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 07: Photongas



Photogas

Elektromagnet. Strahlung in einem
Hohlraum



$$\text{Maxwell-Gl.: } \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})}$$

$$\text{mit } \omega^2 = c^2 k^2 \quad \text{bzw. } \omega = c |\vec{k}| \approx c k$$

$$\text{aus } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

$\vec{E}_0 \perp \vec{k} \dots$ transversale Welle
(2 Polarisationsrichtungen)

EM Wellen im Hohlraum:

$$\vec{E}_n = 0 \text{ am Rand}$$

quaderförmiger Hohlr. (L_x, L_y, L_z) :

$$E(\vec{x}, t) \propto \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}) \text{ mit}$$

$$\vec{k} = \pi \begin{pmatrix} j_x/L_x \\ j_y/L_y \\ j_z/L_z \end{pmatrix} \quad j_{x,y,z} = 1, 2, 3, \dots$$

diskreten Moden mit $\vec{k}_j$ bzw. $\omega(k) = \omega_j$

Quantentheorie des EM-Feldes

jede Mode wird durch einen
quantenmechan. harmon. Oszillator
beschrieben:

$$\underline{e_j = \hbar \omega_j (n_j + \frac{1}{2})} \quad n_j = 0, 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow$ interpretiere n_j als „Teilchenzahl“

$\Rightarrow$ „Quanten des EM Feldes“ $\hat{=}$ Photon

Mikrozust. κ : festgelegt durch
Angabe aller $\{n_j\}$

$$\text{Energie } E_\kappa = \sum_j \epsilon_j$$

E_κ unabhängig von der Gesamtzahl
der Photonen N

$$\Rightarrow \underline{\mu = \frac{\partial E_\kappa}{\partial N} = 0}$$

Photonen werden an Wänden ständig
absorbiert / emittiert $\Rightarrow$ Photonenanzahl
nicht vorgeg.

Gesamtsyst. aus Hohlraum u. Wärmebad

$$S \dots \text{maximal} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial N} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} = - \frac{\mu}{T} \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 0}}$$

Zustandssumme ($\mu = 0$) [$Y = Z$]

$$Y = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_{\{n_j\}} e^{-\beta \sum_j n_j \epsilon_j} = \\ = \prod_j \sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\beta n_j \hbar \omega_j}$$

identisch zur allg. Form d. id. Quantengas
mit $\epsilon_j = \hbar \omega_j$ und $n_{\max} = \infty$



Photonen $\hat{=}$ Bosonen

$\Rightarrow$ BE-Statistik

Bem.: Nullpunktenergie $\frac{\hbar \omega_j}{2}$ gibt

unendlichen Beitrag $\Rightarrow$ konstanter Term,
(unabh. v. Besetzungszahl) $\Rightarrow$
physikalisch nicht beobachtbar

Allg. Ergebn. d. Bosongas:

$$N = \sum_j \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_j} - 1}, \quad E = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{e^{\beta \varepsilon_j} - 1}$$

mit $\bullet) \mu = 0$

$\bullet) \varepsilon_j = \hbar \omega_j$

vgl.: $\vec{k} = \pi \begin{pmatrix} j_x/L_x \\ j_y/L_y \\ j_z/L_z \end{pmatrix} \hat{=} \boxed{\text{VO 1:}} \vec{p} = \pi \hbar \begin{pmatrix} u_x/L_x \\ u_y/L_y \\ u_z/L_z \end{pmatrix}$
 $j \mapsto n$

identifiziere: $\vec{p} = \hbar \vec{k} \Rightarrow \omega = ck$

$$\Rightarrow \omega = \frac{c}{\hbar} |\vec{p}| \Rightarrow d^3p \rightarrow 4\pi \frac{\hbar^3}{c^3} \omega^2 d\omega$$

$\bullet)$ Übergang zu Kontinuum:

$$\sum_j \rightarrow 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \longrightarrow \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2$$

$\uparrow$

2 Polarisationsrichtungen

$$\Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \int_0^{\infty} d\omega g(\omega)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Teilchendichte
in $[\omega, \omega+d\omega]$

$$\frac{E}{V} = \int_0^{\infty} d\omega u(\omega)$$

$$u(\omega) \equiv \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Energiedichte
in $[\omega, \omega+d\omega]$

Plancksche Strahlungsgesetz (Schwarzkörperstrahlung)

Erg. f. masselose Teilchen, $\mu=0$, $\varepsilon=\hbar\omega=cp$

$$\frac{N}{V} = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3, \quad \frac{E}{V} = \frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}$$

($g=2$)

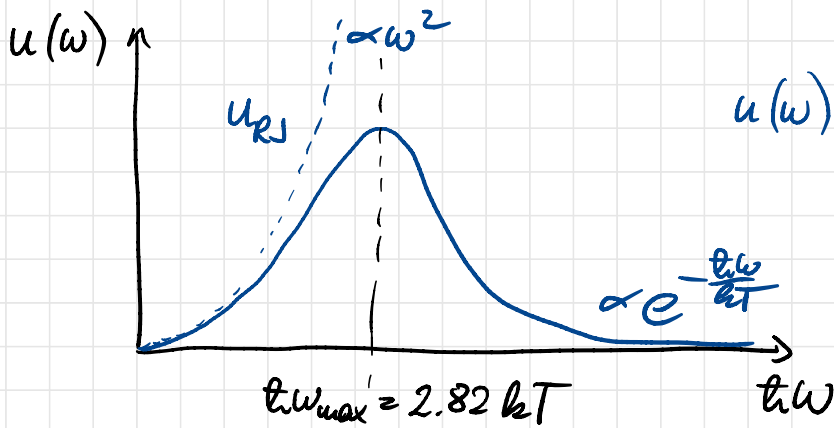
VO 6

Stefan-Boltzmann-Konstante:

$$\sigma = \frac{\pi^2 \hbar^4}{60 \pi^5 c^2} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{4}{c} \sigma V T^4$$

Schwarzkörperstrahlung



$$u(\omega) \propto \frac{\omega^3}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$$

Maximum: $\frac{du}{d\omega} = 0 \Rightarrow \beta h\omega = 3(1 - e^{-\beta h\omega})$

$\frac{x}{3} = 1 - e^{-x}$ numerische Lsg.: $x \approx 2.82$

$\Rightarrow \underline{h\omega_{\max} = 2.82 kT}$

Wien'sche
Verschiebungsgesetz

$\omega \ll \omega_{\max}$: $u_{RJ}(\omega) = \underline{\frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2}$

Rayleigh-Jeans-Gesetz

Anzahl d. Moden proport. zu ω^2
(von $d^3k \rightarrow 4\pi \underline{h^2} dk$)

historisch: RJ: „UV-Katastrophe“

RJ: klassisches Ergebnis

•) $u_{RJ}(\omega)$ folgt aus $u(\omega)$ auch für
 $\hbar \rightarrow 0$, $u_{RJ}(\omega)$ unabh. von $\hbar$

•) $\int_0^{\infty} u_{RJ}(\omega) d\omega \rightarrow \infty$

•) folgt auch aus klass. Gleichverteilungssatz: jede Mode entspr. 2 Freiheitsgr.

$\Rightarrow$ Beitrag kT , Anzahl d. Moden steigt mit $k^2 \propto \omega^2$

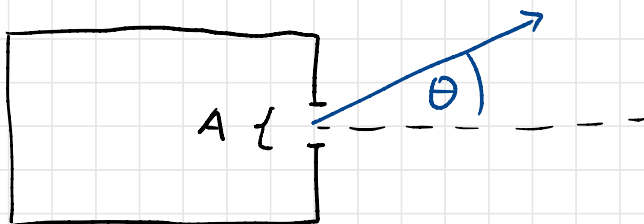
$\Rightarrow$ Quantenhypothese v. Planck 1900
endlicher Wert v. $\hbar$

$\rightarrow$ Bestimmung von $\hbar$ aus $u(\omega)$

$\rightarrow$ für $\omega \gg \omega_{\max}$: $u(\omega) \propto e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

Wärmekapazität: $C_V = \frac{16}{c} \sigma V T^3$

Strahlungsleistung d. Schwarzkörpers



Energiestromdichte: $\frac{\text{Energie}}{\text{Fläche Zeit}} = \frac{E_c}{V}$

$\Rightarrow$ Strahlungsleistung: $\frac{E_c}{V} \cdot A$

Photonen mit statist. verteilte Richtungen
Anteil d. Energiestromdichte $\frac{E_c}{V}$, der
durch die Fläche A geht:

-) Photonen mit Winkel θ in $[0, \frac{\pi}{2}]$
-) Komponente $\perp$ auf $A \Rightarrow$ Faktor $\cos \theta$

$$\Rightarrow P_{e.m.} = \frac{E_c}{V} \cdot A \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cdot \cos\theta}_{\int_0^1 d(\cos\theta)} \cdot \cos\theta$$

Anteil in $d\Omega$:

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{d\varphi d\theta \sin\theta}{4\pi}$$

$$P_{e.m.} = \sigma A T^4$$

Stefan-Boltzmann
Gesetz

Strahlungsdruck: allg.: $\epsilon \propto p^n$

$$p = \frac{4}{3} \frac{E}{V}$$

$n \geq 1$:

$$p = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \frac{4}{3c} \sigma T^4$$

V06

Bsp.: Sonneneinstrahlung auf Erde

$$\sim \frac{1 \text{ kW}}{\text{m}^2} \approx \frac{cE}{V} \Rightarrow p \sim \frac{1 \text{ kW}}{\text{m}^2 c} \sim 3 \cdot 10^{-11} \text{ bar}$$

Anwendungen wesentlich allgemeiner
als für Hohlraumstrahlung
gilt immer wenn Strahlung im
therm. Gleichgew. mit Umgebung ist

-) glühendes Eisen
-) Abstrahlung von EM Str. von der
Sonnenoberfläche $\rightarrow$ Messung des
Spektrums $u(\omega) \Rightarrow$ Bestimmung der
Temperatur d. Sonnenoberfl. $T \approx 5800 \text{ K}$
-) Kosmische Hintergrundsstrahlung
Univers. ist „ausgefüllt“ mit
thermischer Strahlung mit
 $T = 2.7255 \pm 0.0006 \text{ K}$

direkter Hinweis für thermischen Zustand
des Universums $\rightarrow$ therm. Plasma
 $\Rightarrow$ Urknall-Modell $\Leftrightarrow$ „heißes Universum“

black-body spectrum with $T = 2.726 \pm 0.001$ K

