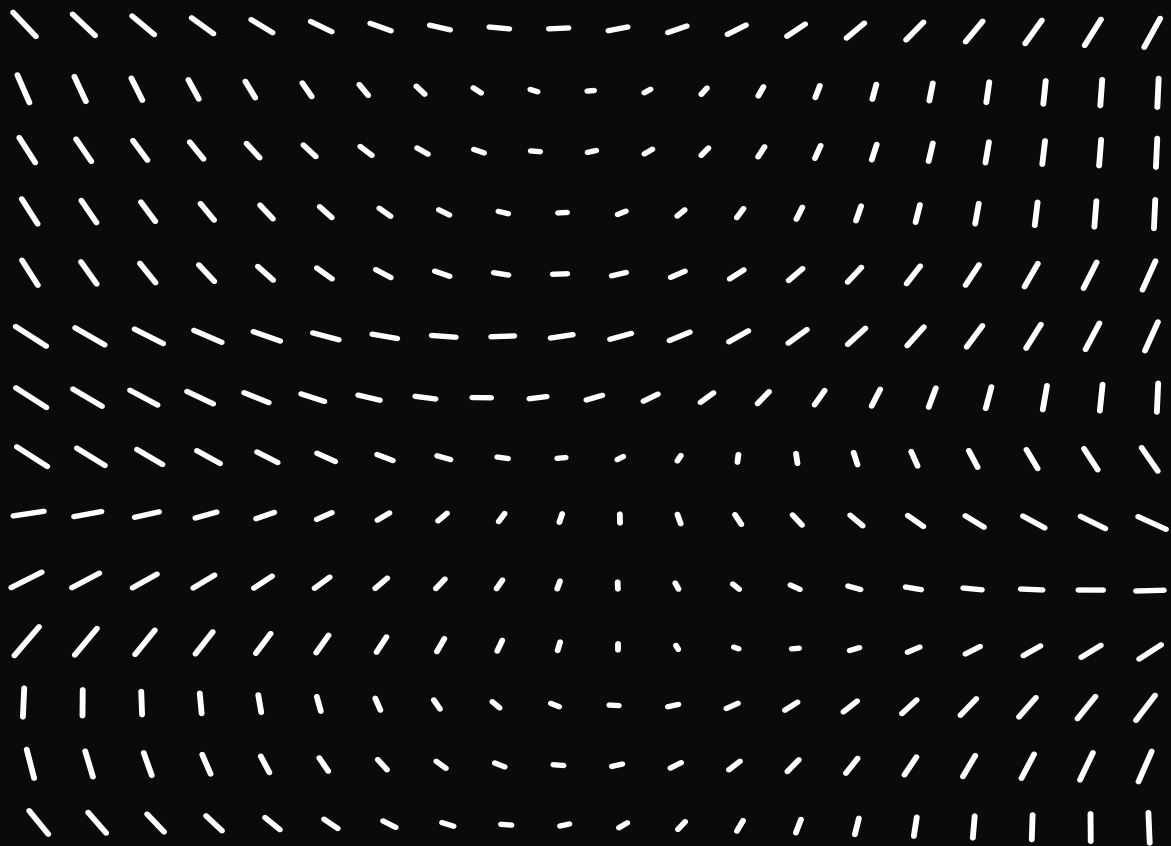


Statistische Physik Theo Fb

Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 09: ideales Bosegas, BE Kondensation



Ideales Bosegas - nichtrelativistische

Bose-Einstein-Kondensation

freie Teilchen, nichtrelativistisch, Bosonen

$$\varepsilon_p = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

mittlere Besetzungszahl

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - 1}$$

$$N(T, V, \mu) = \sum_{\vec{p}} \bar{n}_p$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_{\vec{p}} \varepsilon_p \bar{n}_p$$

verwenden $N(T, V, \mu)$ um $\mu(T, V, N)$

einsetzen in $E \rightarrow E(T, V, N)$

μ ... "Hilfsgröße" um N festzulegen

$E(T, V, N)$... C_V, P ... thermodyn. Eigensch.
festgelegt

frei Teilchen (V groß genug):

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p$$

für $\epsilon_p - \mu = 0$ divergiert $\bar{n}_p \Rightarrow$

$$\boxed{\mu \leq 0} \Rightarrow \epsilon_p - \mu \geq 0 \quad \forall \vec{p}$$

berechne $N(T, V, \mu)$:

$$N = \sum_{\vec{p}} \frac{e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}} = \sum_{\vec{p}} \sum_{\ell=1}^{\infty} (e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)})^{\ell}$$

$$\frac{q}{1-q} \xrightarrow{\uparrow} q \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} q^{\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{\ell}$$

$$N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{\beta\mu\ell} \int d^3p e^{-\frac{p^2\ell}{2m\hbar kT}}$$

$$\underline{\ell=1} \quad \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-\frac{p^2}{2m\hbar kT}} = \frac{1}{\lambda^3}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m kT}} \quad \ell$$

$$\underline{\ell > 1} \quad p^2 \ell \rightarrow p'^2, \quad d^3 p \rightarrow d^3 p' \frac{1}{\ell^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \underline{N(T, V, \mu)} = \frac{V}{\lambda^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu \ell}}{\ell^{3/2}} = \frac{V}{\lambda^3} \underline{g_{3/2}(z)}$$

verallgemeinerte Riemannsche Zetafkt.:

$$g_\nu(z) \equiv \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^\nu}$$

$z \equiv e^{\beta \mu}$ Fugizität

$$\mu(T, V, N) \rightarrow \mu(v, T)$$

$$\underline{v = \frac{V}{N} = \frac{1}{\varrho}}$$

v ... Volumen / Teilchen
 ϱ ... Teilchendichte

T Abhängigkeit bei fester Dichte ϱ

$$\underline{\varrho = \frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) = \text{const} \rightarrow \mu(T)}$$

$$\rightarrow \underline{T \rightarrow \infty}, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad g_{3/2}(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0$$

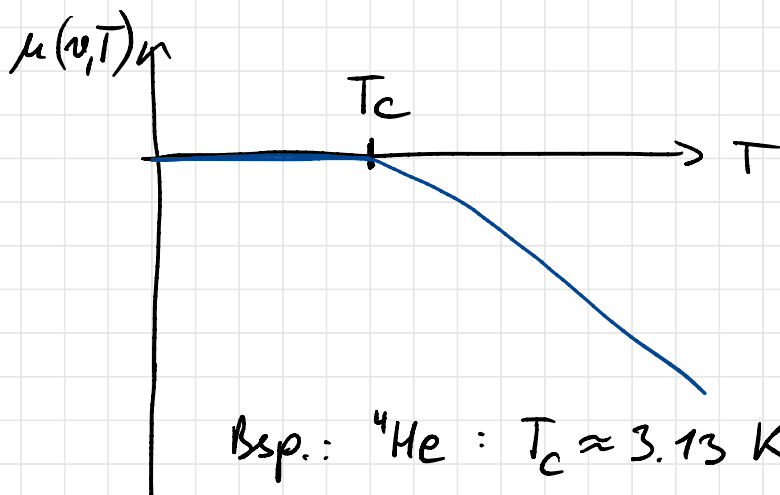
$$\beta \mu \rightarrow -1, \quad \underline{\mu \rightarrow -\infty}$$

-) $g_{\frac{3}{2}}(z)$ monotone Fkt. von z
 für abnehmendes T wächst z
 wegen $\mu \leq 0$ muss $z \leq 1$
 kritischer Wert, bei dem $\mu = 0, z = 1$

$$\lambda_c^3 \cdot g = g_{\frac{3}{2}}(1) = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \dots \text{Zeta-Fkt.} \\ \approx 2.61 \dots$$

$$\Rightarrow kT_c = \frac{2\pi}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{h^2}{m} g^{\frac{2}{3}} \quad \text{kritische Temperatur}$$

$\lambda_c \sim v^{\frac{1}{3}}$ thermische Wellenlänge $\sim$
 mittlere Teilchenabst.



Bsp.: $^4\text{He} : T_c \approx 3.13 \text{ K}$

was passiert bei $T < T_c$?

Gleichung $N = \sum_{\vec{p}} \bar{n}_{\vec{p}}$ muss dsq. haben!

Problem: Übergang zum Kontinuum:
Grundzust. wird „nicht“ mitgezählt

für $\mu = 0$ und $p \rightarrow 0$: $\bar{n}_{\vec{p}} \propto \frac{1}{p^2}$

$d^3p \frac{1}{p^2} \propto dp \rightarrow$ verschwindender
Beitrag um $p \approx 0$

$$\Rightarrow N = \bar{n}_0 + \sum_{\vec{p} \neq 0} \bar{n}_{\vec{p}} = N_0 + \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \bar{n}_{\vec{p}} \\ = N_0 + \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z)$$

$N_0 \equiv \bar{n}_0$ mittl. Teilchenzahl im Grundzust.

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1}$$

$\epsilon_0 \dots$ Grundzust. -
Energie

$$\approx \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \dots \text{thermodyn. Limes}$$

Syst. in Volumen $V = L^3$:

$$\vec{p} = \frac{h}{L} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \quad n_{x,y,z} = 1, 2, 3, \dots$$

$$\epsilon_0 \sim \frac{h^2}{m} \frac{1}{V^{2/3}} \rightarrow 0 \text{ für } V \rightarrow \infty$$

thermodynamische Limes:

$$N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{V} = \rho = \text{const}$$

$$\Rightarrow N_0 \text{ für } T \rightarrow T_c, \mu \rightarrow 0$$

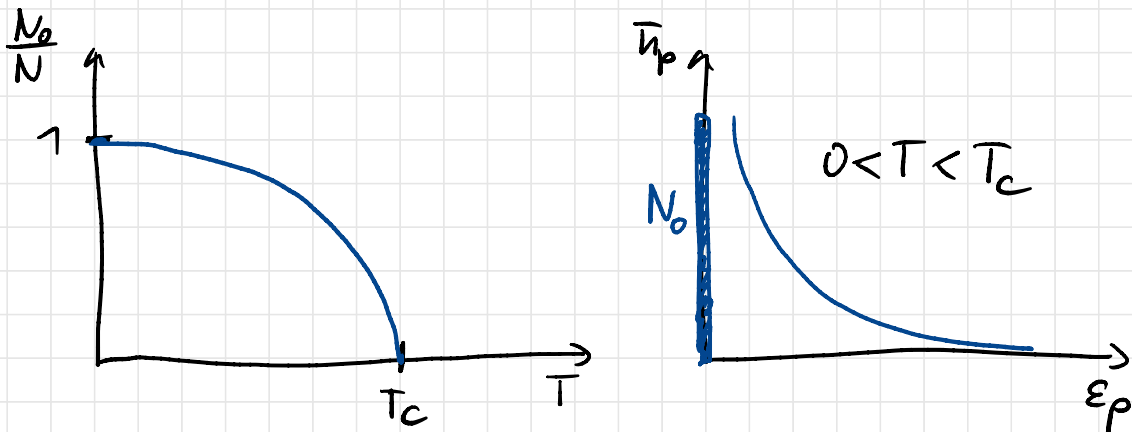
$$N_0 \approx -\frac{kT}{\mu} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow N = \begin{cases} N_0 + \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \approx \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) & T > T_c \\ N_0 + \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(1) = N_0 + \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) & T < T_c \end{cases}$$

$$\text{verwende: } g_{3/2}^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\underline{T < T_c}: N = N_0 + \frac{V}{v} \frac{\lambda_c^3}{\lambda^3} = N_0 + N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{N_0}{N} \approx \begin{cases} 0\left(\frac{1}{N}\right) \approx 0 & T > T_c \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} & T < T_c \end{cases}$$



Bose-Einstein Kondensation

für $T < T_c$: makroskopische Teilchenzahl
im Grundzustand

Energie $E(V, T, \mu) = \sum_{\vec{p}} \epsilon_p \bar{n}_p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \dots$

$$E(V, T, \mu) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{e=1}^{\infty} z^e \underbrace{\int d^3p \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{p^2 e}{2m\hbar^2 T}}}_{-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial e} \int d^3p e^{-\frac{p^2 e}{2m\hbar^2 T}}}$$

$$E(V, T, \mu) = \frac{3}{2} kT \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z) \quad (*)$$

gilt auch für $T < T_c$, weil $\epsilon_0 \rightarrow 0$
kein Beitrag des Kondensats zu E !

für $T < T_c$ gilt $z \approx 1$, $g_{\frac{5}{2}} = \zeta(\frac{5}{2})$

$$\Rightarrow \underline{E = \frac{3 \zeta(\frac{5}{2})}{2 \zeta(\frac{3}{2})} N kT \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \quad T < T_c}$$

für $T > T_c$: $E(V, T, \mu) \rightarrow$ muss μ
 eliminieren durch
 N

μ aus $g = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z)$ ausdrücken

Fall $T \gg T_c$, $z \ll 1$: behandelt unter
 „Quantenkorrekturen zum klass. Gas“

haben: $E \approx \frac{3}{2} N kT \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \frac{\lambda^3}{v} \dots \right)$

VO 6

UE

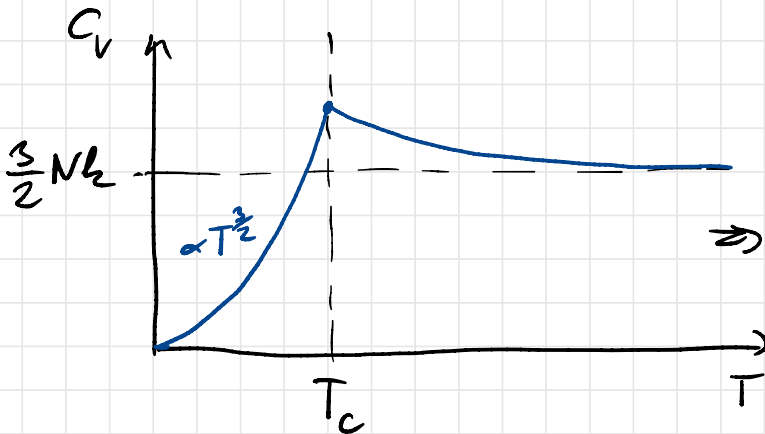
$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{\lambda^3}{\lambda_c^3} \frac{\lambda_c^3}{v} = \left(\frac{T_c}{T} \right)^{\frac{3}{2}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$E \approx \frac{3}{2} N k T \left(1 - \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{2^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{T_c}{T} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right) \quad T \gg T_c$$

Wärmekapazität: $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{N,V}$

$T < T_c$: $C_V = \frac{15}{4} \frac{\zeta(\frac{5}{2})}{\zeta(\frac{3}{2})} N k \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}$

$T \gg T_c$: $C_V = \frac{3}{2} N k \left[1 + \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{2^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{T_c}{T} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right]$



C_V stetig bei T_c

aber Knick:

$\Rightarrow$ Phasenüberg.

(2. Ordn.)

für $T \approx T_c$ implizite Lsg. $C_V(z)$
 $T(z)$

thermische Zustandsgleichung

allg. Beziehung: $P = \frac{n}{3} \frac{E}{V}$ für $E \propto \rho^n$

$$\Rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \quad \text{mit } E \text{ aus (*)}$$

$$\underline{P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z)}$$

$$\underline{T < T_c} : z = 1 : P = \frac{kT}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Druck } \underline{\text{unabh. von } V} : \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$$

- kein Widerstand bei Volumsverkleinerung!
(bei konst. T)
- aber: reale Systeme:
 - endl. Volumen: $\varepsilon_0 > 0$: endliche Beiträge zu E, P von Teilchen im Grundzust.
 - Wechselwirkung zw. Teilchen werden wichtig $\rightarrow$ Beitr. zu Druck

