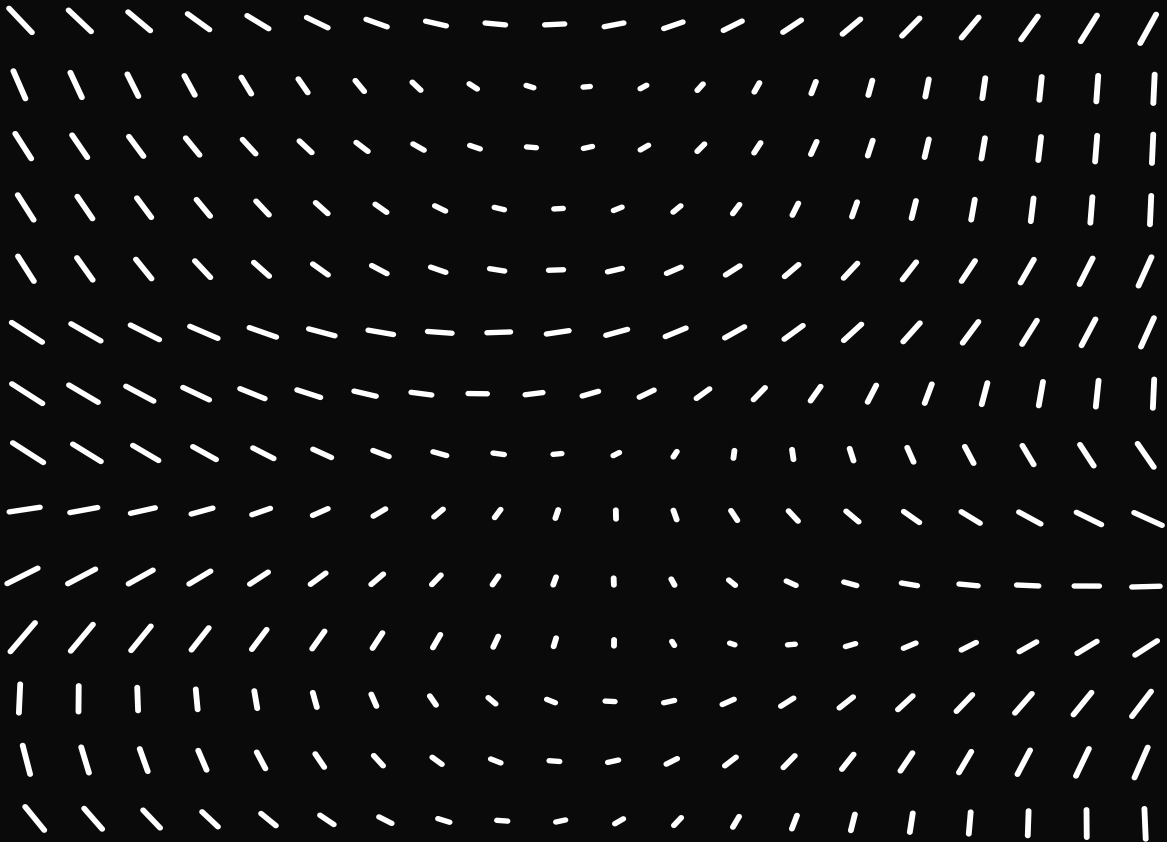


Statistische Physik Theo Fb

Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 10: Ideales Fermigas I



Ideales Fermigas

nicht-relativistische Fermionen

Spin $\frac{1}{2}$ (Elektronen)

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}, \quad \bar{n}_p = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} + 1}$$

$$N(T, V, \mu) = \sum_{s_z, \vec{p}} \bar{n}_p$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_{s_z, \vec{p}} \varepsilon_p \bar{n}_p$$

$$\sum_{s_z, \vec{p}} \rightarrow \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p$$

$$\text{von } \sum_{s_z}$$

(Ann. Energie ist entartet
in Spinorientierung)

$N(T, V, \mu)$ nach μ auflösen $\rightarrow \mu(T, v)$ $v = \frac{V}{N}$

$\rightarrow$ in $E(T, V, \mu)$ einsetzen $\Rightarrow E(T, V, N)$

$\rightarrow C_V, \text{ Druck}, \dots$

Zustandsdichte:

$$\frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 = \frac{\sqrt{2} V m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon}$$

$$p^2 = 2m\varepsilon, \quad p dp = m d\varepsilon, \quad p^2 dp = \sqrt{2} m^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$
$$= V \int_0^\infty g_{\text{id}}(\varepsilon) d\varepsilon \quad \underline{g_{\text{id}}(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\varepsilon}}$$

↗

Zustandsdichte d. idealen Fermigas

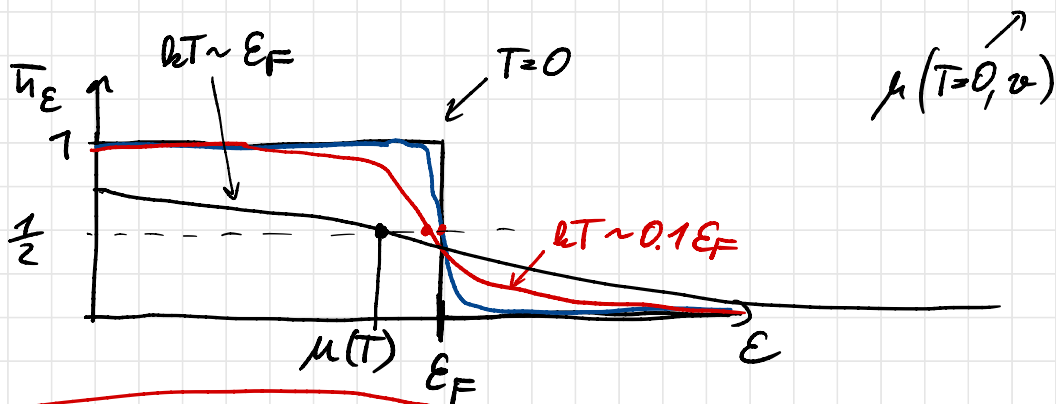
Abweichungen vom id. Gas kann man manchmal durch eine modifizierte Zustandsdichte beschreiben $\rightarrow$ $g(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \frac{N}{V} = \mathcal{S} = \frac{1}{v} = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

bei fester Teilchendichte $\mathcal{S} \Rightarrow \mu(T, v)$

limes $T \rightarrow 0$

$$\bar{n}_\epsilon = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(\mu - \epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{f. } \epsilon < \mu \\ 0 & \text{f. } \epsilon > \mu \end{cases}$$



$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} \equiv \mu(T=0, v)$$

Fermi-Energie
(-Impuls)

$T=0$ alle Niveaus bis zur Fermi-Kante
aufgefüllt (einfach besetzt) Pauli-Prinzip

$$g = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ g \rightarrow g_{\text{tot}}}}{=} \frac{12}{\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \sqrt{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \epsilon_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2} \frac{\hbar^2 g^{2/3}}{m}$$

nur abh. v.
 g und m

vergleiche: kritische Temperatur des
id. Bosegases: $kT_c = \frac{2\pi}{\zeta(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}} \frac{\hbar^2 g^{\frac{2}{3}}}{m}$!

$$\frac{\hbar^2 g^{\frac{2}{3}}}{m} = \frac{\hbar^2}{m v^{\frac{2}{3}}} = \frac{\hbar^2}{m \ell^2} \quad \ell \dots \text{mittl. Abst. der Teilchen}$$

$$T=0 \Leftrightarrow kT \ll E_F$$

endliche Temp: „Abrundung“ d. Fermi-Kante

Energie bei $T=0$

$$\frac{E}{V} = \int_0^{E_F} dE \, E g(E) \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{2}}{4^2} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3} \int_0^{E_F} dE \, E^{\frac{3}{2}} \underset{=}{=} \frac{2}{5} E_F^{\frac{5}{2}}$$

$$\underline{\frac{E}{V} = \frac{3}{5} g E_F} \quad \text{od.} \quad \underline{E(T=0, N, V) = \frac{3}{5} N E_F}$$

Druck bei $T=0$:

$$P = \frac{n}{3} \frac{E}{V}, \quad E \propto p^2$$

$$\underline{P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{5} g E_F = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{5} \frac{\hbar^2}{m} g^{\frac{5}{3}} \quad (T=0)}$$

Fermi-Druck

für klass. Gas, Bosegas: $P \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$

Fermidruck: wichtig für Stabilität d. Materie,
weiße Zwerge, Neutronensterne

wenn alle Niveaus besetzt sind, kostet es
sehr viel Energie das System weiter zu
komprimieren, weil $E_F = \mu(0,0) \propto \frac{1}{V^{2/3}}$

Beispiele:

•) Protonen im Atomkern:

$$R \sim r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \sim 10^{-13} \text{ cm}$$

A ... Massenzahl, Z ... Kernladungszahl

Protonendichte: $\rho_p \sim \frac{Z}{\frac{4\pi R^3}{3}} \sim \frac{3}{8\pi r_0^3} \quad (A \sim 2Z)$

$$m_p \approx 930 \text{ MeV}/c^2$$

$$\Rightarrow E_F \approx 30 \text{ MeV} \approx 3 \times 10^7 \text{ eV}$$

•) Elektronen im Metall (im Leitungsband)

$\rho \sim$ Dichte d. Atome $\times$ Anz. d. Valenzelektronen

$$\rho \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}, \quad m_e \sim 511 \text{ keV}/c^2$$

$$\Rightarrow E_F \sim 10 \text{ eV}$$

$$T_F = \frac{E_F}{k} \sim 80\,000 \text{ K}$$

$\Rightarrow$ für Elektronen im Metall gilt $kT \ll E_F$
„entartetes Fermigas“

$\uparrow$ gilt praktisch für alle Temperatur.
kleiner Schmelztemperatur

•) ^3He Flüssigkeit

$\rho^{2/3} \sim 10 \times$ größer als f. Electr. in Metall

aber $E_F \sim 4 \times 10^{-4} \text{ eV} \ll$ Metall

weil $m_{\text{He}} \approx 6000 m_e$

•) Elektronen im Zentrum d. Sonne:

$$E_F \sim 560 \text{ eV} \hat{=} T_F \sim 6 \times 10^6 \text{ K} \lesssim T_{\text{Sonne}} \sim 5 \times 10^7 \text{ K}$$

Entartung spielt keine Rolle

Gleichgew. zw. Gravitation und Druck durch „kinetischen Druck“ $P = NkT/V$

•) Weisse Zwerge

$$M \sim M_{\odot} \text{ aber } R \sim 10^4 \text{ km} \sim 10^{-2} R_{\odot}$$

$$\Rightarrow T_F \sim 10^9 \text{ K} \gg T$$

Elektronengas ist entartet:

Fermi-Druck für Gleichgew. mit

Gravitation verantwortlich

UE

$$E_F \sim 9 \times 10^4 \text{ eV} < m_e c^2 = 5 \times 10^5 \text{ eV}$$

$\Rightarrow$ Elektronen nicht-relativistisch

für schwerere Objekte: $E_F \gtrsim m_e c^2$
⇒ relativistische Effekte

⇒ relativistisches Fermigas: UE

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \varepsilon = cp$$

⇒ Neutronensterne: $M \gtrsim M_0$, $R \sim 10 \text{ km}$
→ Fermidruck der Neutronen

