# Statistische Physik Theo Fb

Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 11: Fermigas bei kleinen Temperaturen

Zusammenfassung BE/FD/MB Statistik

# Fermigas bei kleinen Temperaturen

$kT \ll \varepsilon_F$

Metalle, Elektronengas:

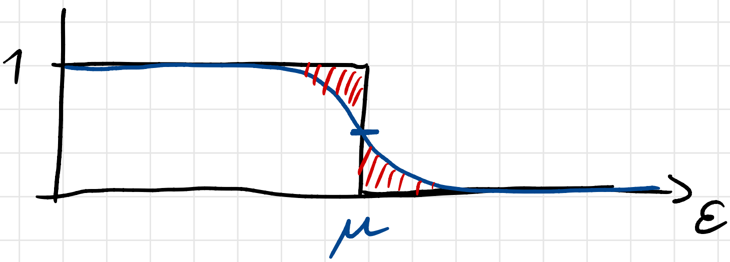
$\varepsilon_F \sim 10\,eV$, $T_F \sim 80\,000\,K$

$T=0$ Limes reicht nicht für $C_V$ $\Rightarrow$

berechne Korrekturterme zu $T=0$

$$\bar{n}_\varepsilon = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

... ist „symmetrisch" um $\varepsilon = \mu$



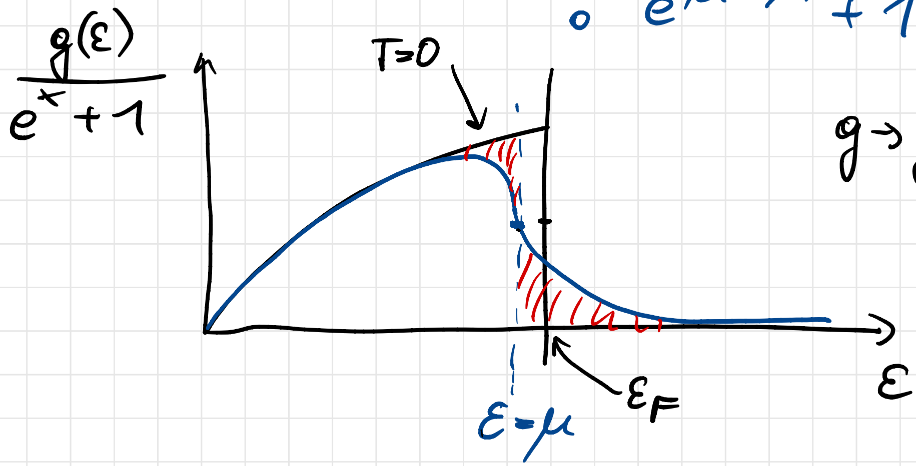

$\bar{n}_{\varepsilon=\mu} = \frac{1}{2}$

$$y(x) \equiv \bar{n}_\varepsilon - \Theta(\mu-\varepsilon) = \frac{1}{e^x+1} - \Theta(-x)$$

$$x = \beta(\varepsilon-\mu)$$

es gilt: $\underline{y(-x) = -y(x)}$

betrachte: $\frac{N}{V} = \varrho = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon\, g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$




$g \to g_{id} \propto \sqrt{\varepsilon}$

$\bar{n}_\varepsilon$ symm. um $\varepsilon = \mu$ aber $g(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ um $N =$ const, muss $\mu < \varepsilon_F$ für $T > 0$

## Entwicklung in kleinen Temp.

(Sommerfeld-Technik)

$\varrho = \int_0^\infty d\varepsilon\, g(\varepsilon)\, \bar{n}_\varepsilon \quad , \quad \frac{E}{V} = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, g(\varepsilon)\, \bar{n}_\varepsilon$

allg.: $\int_0^\infty d\varepsilon\, f(\varepsilon)\, \bar{n}_\varepsilon$

$f(\varepsilon) = \begin{cases} g(\varepsilon) & \text{f. } \varrho \\ \varepsilon \cdot g(\varepsilon) & \text{f. } \frac{E}{V} \end{cases}$

$$I \equiv \int_0^\infty d\varepsilon\, f(\varepsilon)\, \bar{n}_\varepsilon = \int_0^\mu d\varepsilon\, f(\varepsilon) + \underbrace{\int_0^\infty d\varepsilon\, f(\varepsilon)\left[\bar{n}_\varepsilon - \Theta(\mu-\varepsilon)\right]}_{\frac{1}{\beta}\int_{-\beta\mu}^{\infty} dx\, g(x)\, f\left(\mu+\frac{x}{\beta}\right)}$$

$$-\beta\mu \longrightarrow -\infty$$

$$\beta\mu \approx \frac{\varepsilon_F}{kT} \sim \frac{10\,eV}{\frac{1}{40}\,eV} \sim 400 \nearrow$$

$\leftarrow$ Raumtemp.

$g(x) \neq 0$ nur in d. Nähe von $x = 0 \Rightarrow$

$\varepsilon = \mu \approx \varepsilon_F$

$\Rightarrow$ Entwicklung um $x = 0$

$$f\left(\mu + \frac{x}{\beta}\right) \approx f(\mu) + \frac{1}{\beta} f'(\mu)\, x + \frac{1}{2\beta^2} f''(\mu)\, x^2 + \ldots$$

$g(x)$ ungerade $\Rightarrow$ nur ungerade Potenzen von $x$ tragen bei

$$\Rightarrow I = \int_0^\mu d\varepsilon\, f(\varepsilon) + \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)\left[\frac{1}{\beta} f'(\mu)\, x + \mathcal{O}(x^3)\right]$$

$$I = \int_0^{\mu} d\varepsilon\, f(\varepsilon) + \frac{f'(\mu)}{\beta^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)\, x}$$

$$2\int_0^{\infty} dx\, g(x)\, x = 2\int_0^{\infty} dx\, \frac{x}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$I \approx \int_0^{\mu} d\varepsilon\, f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 f'(\mu)$$

$\mu$ aus Gleichung für $\varrho$ bestimmen:

$$f(\varepsilon) = g(\varepsilon) \Rightarrow \varrho = \int_0^{\mu} d\varepsilon\, g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g'(\mu)$$

$$\approx \underbrace{\int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, g(\varepsilon)}_{\varrho \text{ bei } T=0} + \underbrace{\int_{\varepsilon_F}^{\mu} d\varepsilon\, g(\varepsilon)} + \frac{\pi^2}{6} \ldots$$

$\varrho = \text{const.}$

$$\to (\mu - \varepsilon_F)\, g(\tilde{\varepsilon})$$

Mittelwertsatz: $\tilde{\varepsilon} \in [\varepsilon_F, \mu]$

$$\Rightarrow (\varepsilon_F - \mu)\, \underbrace{g(\tilde{\varepsilon})}_{\hookrightarrow \varepsilon_F} = \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\, g'(\mu) \quad \mu \to \varepsilon_F$$

$$\Rightarrow \mu(T) = \varepsilon_F + O(kT)^2 \qquad \tilde{\varepsilon} \to \varepsilon_F$$

$$\Rightarrow \mu(T,v) \approx \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \frac{g'(\varepsilon_F)}{g(\varepsilon_F)}$$

für $g \to g_{id} \propto \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow g'_{id} = \frac{1}{2}\frac{g_{id}}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \mu(T,v) \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2 + \ldots\right] \quad \text{(i.d.)}$$

$\varepsilon_F(v)$

<u>Energiedichte:</u> $\qquad f(\varepsilon) = \varepsilon\, g(\varepsilon)$

$$f' = g + \varepsilon g'$$

analoge Rechnung

$$\frac{E}{V} = \underbrace{\int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, \varepsilon\, g(\varepsilon)}_{E_0/V} + \underbrace{(\mu - \varepsilon_F)\,\varepsilon_F\, g(\varepsilon_F)}_{-\frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \varepsilon_F g'(\varepsilon_F)} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \times \left[g(\varepsilon_F) + \cancel{\varepsilon_F\, g'(\varepsilon_F)}\right]$$

$$\frac{E}{V} \approx \frac{E_0}{V} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g(\varepsilon_F)$$

und $$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{\pi^2}{6} k^2 T V g(\varepsilon_F) \quad \propto T$$

ideales Fermigas: $g(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$

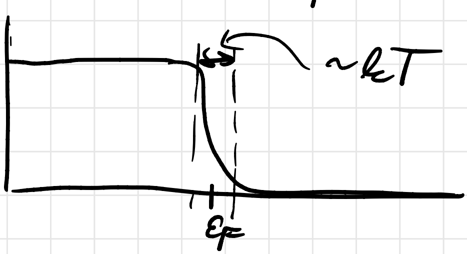
es gilt: $$\rho = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, g(\varepsilon) = C \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} = g(\varepsilon_F)\frac{2}{3}\varepsilon_F$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E &= E_0 + \frac{\pi^2}{4} NkT \frac{kT}{\varepsilon_F} \\ C_V &= \frac{\pi^2}{2}\frac{kT}{\varepsilon_F} \cdot kN \end{aligned}}$$

(i.d.)

$$\frac{kT}{\varepsilon_F} \sim \frac{1}{400} \Rightarrow C_V \ll \frac{3}{2} Nk$$

$$E - E_0 \sim NkT \cdot \frac{kT}{\varepsilon_F}$$




alle Niveaus besetzt, nur Elektronen in $\Delta E \sim kT$ um $\varepsilon_F$ können angeregt wd.

jedes Elektr. einen Beitrag zu E ~ kT

$\Rightarrow N \frac{kT}{} \cdot kT$ Dimension: brauche

$\frac{1}{\text{Energie}} \Rightarrow \frac{1}{E_F}$

## Messung von $C_V$ von Metallen:

Beitrag v. Elektronengas + Kristallgitter

Debey-Modell $\boxed{V08}$

$$C_V^{\text{Phon.}} \approx \frac{12\pi^4}{5} Nk \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 , \quad T \ll T_D$$

Ansatz: $C_V = \alpha T^3 + \beta T$

Phononen Elektronen

für $N_{el} \approx N_{Atm} \Rightarrow \frac{C_V^{El}}{C_V^{Ph}} \approx \frac{5}{12\pi^2} \frac{T_D^3}{T_F\, T^2}$

$\Rightarrow$ für kleine T kann $C_V^{El}$ dominieren

# Zusammenfassung FD/BE/MB

nicht-relativistisch: $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$

$$\bar{n}_\varepsilon = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \mp 1} \xrightarrow[MB]{} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$

$$N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \, \bar{n}(\varepsilon) \Rightarrow \text{bestimmt } \mu(T, v)$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{N}$$

$\mu(T, v)$:

BE $\quad \rho = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z) \quad , \; z = e^{\mu\beta} \longrightarrow \mu(T, v)$

$$\Rightarrow T_c \text{ für } \mu = 0: \; kT_c = \frac{2\pi}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}} \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{m}$$

FD $\quad \mu(T \to 0) = \varepsilon_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2} \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{m}$

[ $\mu(T, v)$ i.A. nicht explizit lösbar ]

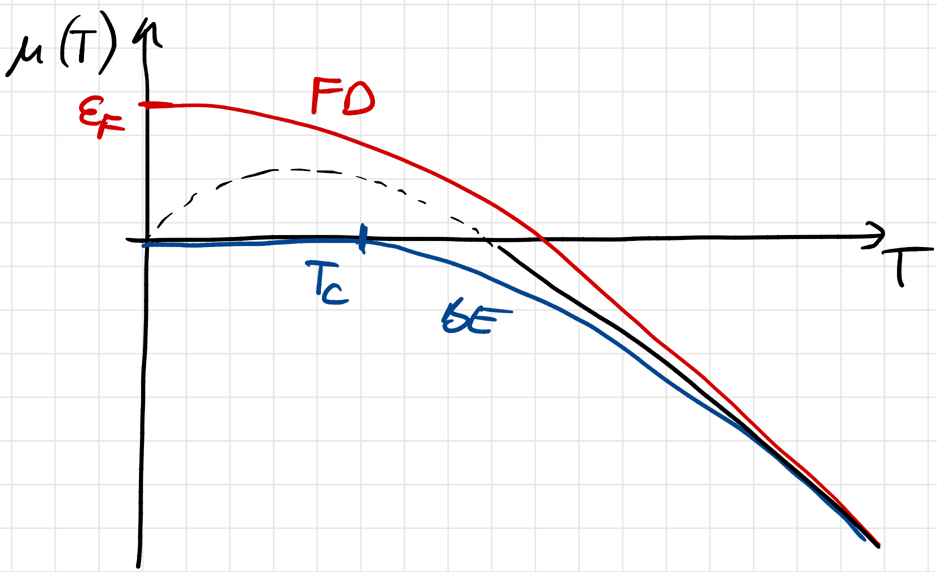
MB

$$\rho = \frac{e^{\mu\beta}}{2\pi^2\hbar^3}\int dp\, p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} = e^{\mu\beta}\frac{1}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu(T,v)}{kT} = -\frac{3}{2}\ln kT + \frac{3}{2}\ln\left[2\pi\,\underline{\frac{\hbar^2\rho^{2/3}}{m}}\right]$$

↓

klass. id. Gas, z.B. aus Sakur-Tetrode-Gl.



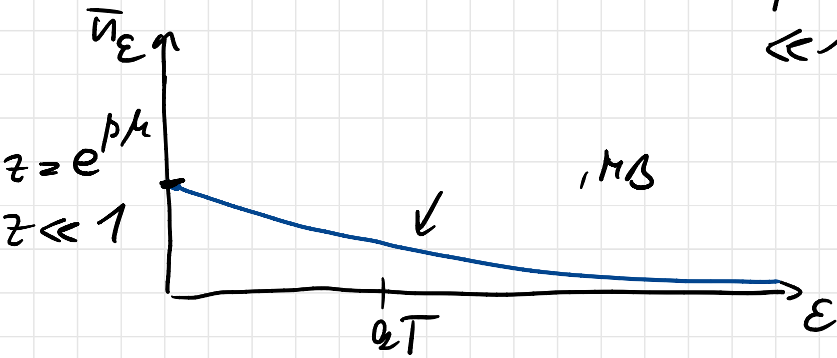

wenn $\mu(T)$ bekannt $\Rightarrow \bar{n}(\varepsilon)$

für geg. $T$ und $\rho$

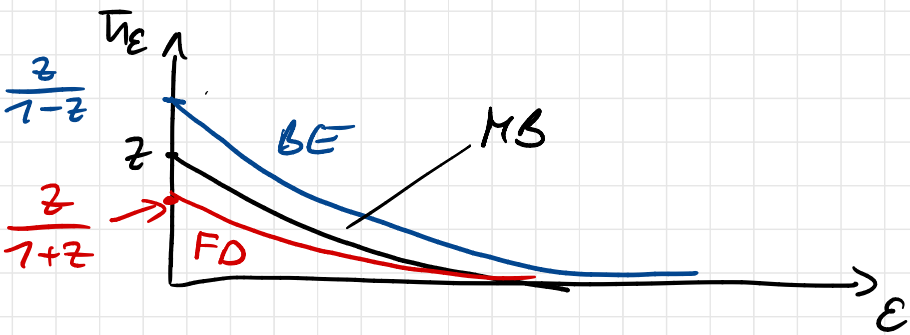
Fall $\boxed{T \gg T_F, T_C}$

$$\mu \ll -\varepsilon_F \Rightarrow e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \gg 1 \quad \forall\, \varepsilon$$

$$\Rightarrow \bar{n}_{FD} \approx \bar{n}_{BE} \approx \bar{n}_{MB} = \underbrace{e^{+\beta\mu}}_{\ll 1} e^{-\varepsilon/kT}$$



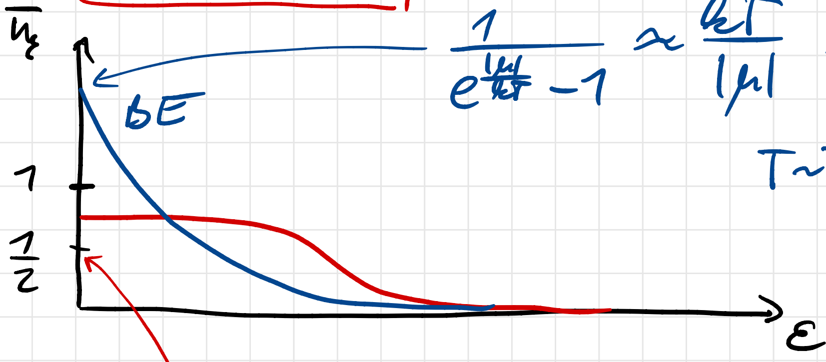

Fall: $T \gtrsim T_F, T_C$ , $z \lesssim 1$



Fall: $\boxed{T \sim T_F, T_c}$

$$\frac{1}{e^{|\mu|/kT}-1} \approx \frac{kT}{|\mu|} \gg T$$

$T \sim T_c$, $|\mu| \ll kT$




$\frac{1}{2}$ bei $\mu = 0$

Fall $\boxed{T \ll T_F, T_c}$

entartete Fermigas