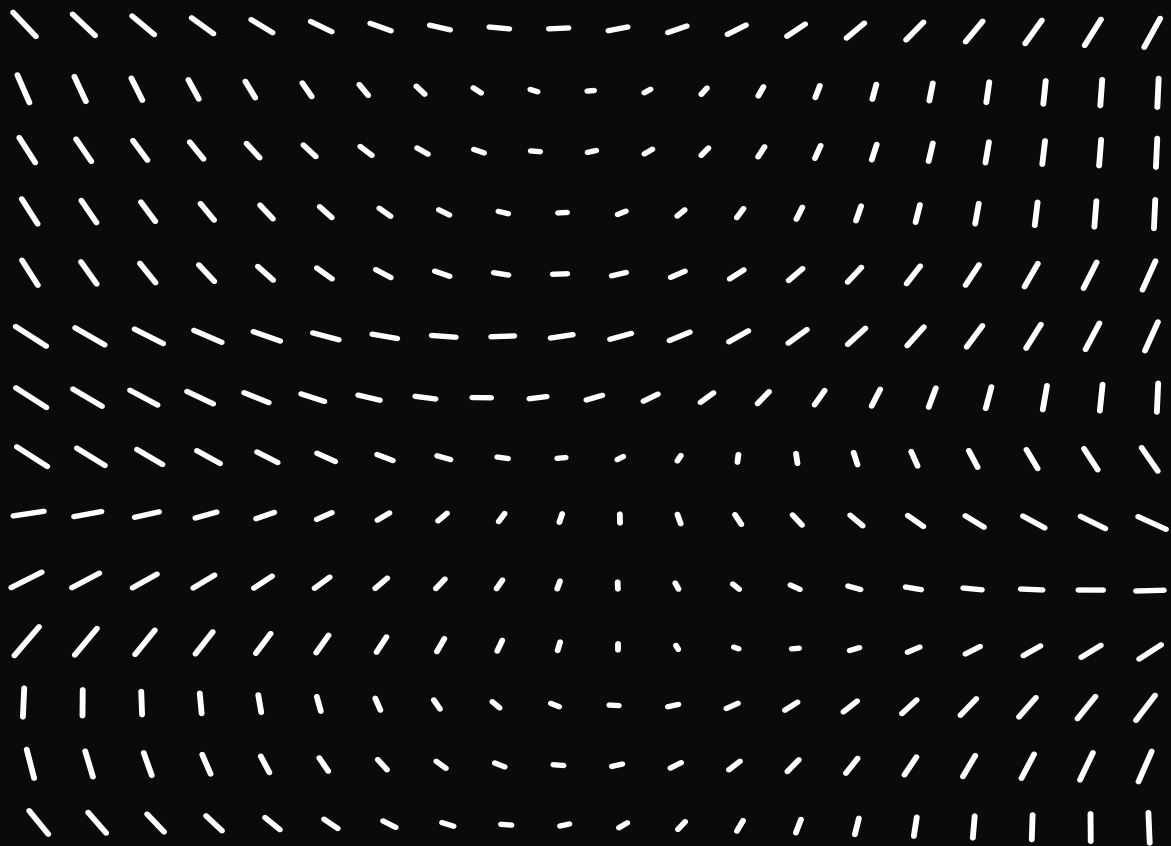


Statistische Physik Theo Fb

Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 15: Boltzmann-Gleichung



Boltzmann Gleichung

Beschreibung v. Vielteilchensystemen auch
abseits des Gleichgewichts

viele Anwendungen in verschiedenen
Bereichen d. Physik

Transportphänomene, Hydrodynamik,
Kosmologie, Astrophysik,

Verteilungsfunktion im Phasenraum für klassische Teilchen

$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v$ Anzahl der Teilchen,
die sich zur Zeit t im Phasenraum =
element $d^3x d^3v$ um $(\vec{x}, \vec{v})$ befinden

↳ 6-dimensional

-) nichtrelativist. Teilchen, $\vec{p} = m\vec{v}$, $\varepsilon = \frac{m\vec{v}^2}{2}$
-) nur eine Teilchensorte
-) keine inneren Freiheitsgrade

⇒ im Gleichgew. wdt. das System durch die Maxwell'sche Geschwindigkeitsvert. beschrieben

Normierung:
$$\int_V d^3x \int d^3v f(\vec{x}, \vec{v}, t) = N$$

⇒ $\frac{1}{N} f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung

Teilchendichte:

$$\rho(\vec{x}, t) = \int d^3v f(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

mittlere Teilchengeschwindigkeit

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{\int d^3v \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{N}$$

Teilchenstromdichte: $\vec{j}(\vec{x}, t) = N \vec{u}(\vec{x}, t)$

mittlere kin. Teilchenenergie:

$$\varepsilon(\vec{x}, t) = \frac{\int d^3v \frac{m \vec{v}^2}{2} f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{N}$$

Falls Syst. im therm. Gleichgewicht gilt:

$$\mathcal{Q}(\vec{x}, 1) = \mathcal{Q} = \text{const.}$$

$$\vec{u}(\vec{x}, 1) = 0$$

$$\mathcal{E}(\vec{x}, 1) = \mathcal{E} = kT$$

verallgemeinerte Temperatur für

Nichtgleichgewichtssysteme:

mittl. kin. Energie relativ zur mittleren
Geschwindigkeit:

$$kT(\vec{x}, 1) \equiv \int d^3\vec{v} \frac{m}{2} (\vec{v} - \vec{u})^2 \frac{f(\vec{x}, \vec{v}, 1)}{N}$$

$$= \frac{m}{2} (\Delta v)^2$$

$(\Delta v)^2 \dots$ Varianz

$$(\Delta v)^2 = \overline{v^2} - \bar{v}^2$$

Boltzmann-Gleichung

Dynamische Gleichung für $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$
(„Bewegungsgleichung“)

allg. $L[f] = C[f]$

Liouville-Operator

Verhalten von f
durch freie Bewegung
d. Teilchen

Kollisionsoperator

Einfluss der
WW zw. Teilchen
(Stöße)

-) betrachte vorerst Fall $C[f] = 0$
(keine Wechselw. zw. Teilchen)

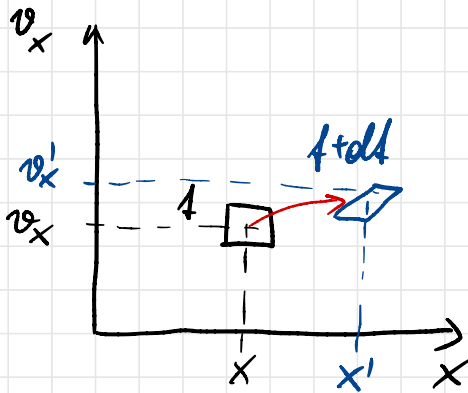
$$L[f] = 0$$

wechselwirkungsfreie Teilchen unter
Wirkung einer Kraft $\vec{F}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{x}}$$
$$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Anm.: $\vec{F}$ sei unabh. von
d. Geschwindigkeit
(konservativ)

wie verhält sich $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$?



$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v = f(\vec{x}', \vec{v}', t') d^3x' d^3v'$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \dot{\vec{x}} dt = \vec{x} + \vec{v} dt$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + \dot{\vec{v}} dt = \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt$$

$$d^3x' d^3v' = |J| d^3x d^3v$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial x'_i}{\partial v_j} = \delta_{ij} dt$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x_j} dt \quad \frac{\partial v'_i}{\partial v_j} = \delta_{ij}$$

$$|J| = 1 + \mathcal{O}(dt^2) \Rightarrow d^3x' d^3v' \approx d^3x d^3v$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}, \vec{v}, t) = f(\vec{x}', \vec{v}', t') \approx$$

$$\approx f(\vec{x}, \vec{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial f}{\partial v_i} dv_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Sammelenkonvention
über wiederholte Indizes
wird summiert

$$\downarrow$$

$$v_i dt$$

$$\downarrow$$

$$\frac{F_i}{m} dt$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{F_i}{m} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

"Liouville -
Theorem"

stoßfreie Boltzmann-Gleichung

Bsp.: Sterne in der Galaxie

dunkle Materie im Universum

integriere über d^3v

$$\int d^3v v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int d^3v v_i f(\vec{x}, \vec{v}, t) = N \vec{\nabla} \vec{u}$$

$$= \vec{\nabla} \vec{f}$$

$$\frac{F_i}{m} \int d^3v \frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{F_i}{m} \int_{\vec{v} \rightarrow \infty} d\vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) = 0$$

$\uparrow$ $\vec{F}$ unabh. von $\vec{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3v f = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung

Teilchenzahlerhaltung

Boltzmann-Gl.:

$$\frac{df}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v f + \frac{\partial f}{\partial t} = C[f] = R_{in} - R_{out}$$

↑
Effekt von Stößen, abh. von
physikalischen Prozessen

einfaches Beispiel für $C[f]$:

elastische Stöße im verdünnten Gas

WV d. Teilchen: Streuquerschnitt σ

$$\sigma = \pi d^2, \quad d \dots \text{"Größe des Teilchens"}$$

mittlere freie Weglänge $l = \tau_s \bar{v}$

τ_s ... mittl. Zeit zw. 2 Stößen

$\bar{v}$... mittl. Geschwindigkeit d. Teilchen

$$(\bar{v} = \int d^3v |\vec{v}| \frac{f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{N})$$

$$\tau_s = \frac{1}{\text{Anz. d. Stöße pro Zeit}} = \frac{1}{\bar{v}_n \sigma g} = [s]$$

$\bar{v}_n$... mittl. Relativgeschw.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \searrow & \rightarrow \\ \text{cm s}^{-1} & \text{cm}^2 & \text{cm}^{-3} \end{array}$$

$$\bar{v}_n \sim \bar{v}$$

$$\Rightarrow l = \tau_s \bar{v} \sim \frac{1}{\sigma g}$$

Ann.: verdünntes Gas:

$$d \ll l$$

$$\text{mit } \sigma = \pi d^2 \Rightarrow \pi d^3 \ll \frac{1}{g}, \quad d \ll \frac{1}{g^{1/3}}$$

•) betrachte Korrelator zw. 2 Teilchen:

$$g(\vec{x}_1, \vec{v}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_2, t) d^3x_1 d^3x_2 d^3v_1 d^3v_2$$

Wahrsch. gleichzeitig Teilchen 1 bei $(\vec{x}_1, \vec{v}_1)$
und Teilch. 2 bei $(\vec{x}_2, \vec{v}_2)$ anzukreffen

Ann.: molekulare Chaos

$$g(\vec{x}_1, \vec{v}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_2, t) = \frac{f(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t)}{N} \frac{f(\vec{x}_2, \vec{v}_2, t)}{N}$$

Teildr. unkorreliert, Wahrsch. unabh. voneinander
Konsequenz von $d \ll l$

•) betrachte:

$$\frac{\text{Dauer eines Stoßes}}{\text{Zeit zw. 2 Stößen}} = \frac{d/\bar{v}}{\tau_s} \approx \frac{d/\bar{v}}{l/\bar{v}} = \frac{d}{l} \ll 1$$

⇒ Wahrscheinl., dass 3 Teilchen
gleichzeitig aneinander stoßen $\ll$
2-Teilchenstöße ⇒

Ann.: Dreierstöße sind vernachlässigbar

Berechnung von $C[f]$ für elast.

2-Teilchenstöße

$$\vec{v} + \vec{w} \rightarrow \vec{v}' + \vec{w}'$$

Impulserhaltung: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{v}' + \vec{w}' = \vec{v}_S$

Energieerh.: $\vec{v}^2 + \vec{w}^2 = \vec{v}'^2 + \vec{w}'^2$

Schwerpunkt- und Relativgeschw.:

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{v}_S + \vec{v}_R, \quad \vec{v}' = \frac{1}{2} \vec{v}_S + \vec{v}_R'$$

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \vec{v}_S - \vec{v}_R, \quad \vec{w}' = \frac{1}{2} \vec{v}_S - \vec{v}_R'$$

Energieerh.: $\vec{v}_R^2 = \vec{v}_R'^2$

unabh. Größen: $\vec{v}_S, \vec{v}_R, \theta, \varphi$ im Schwerpunktsys!

oder: $\vec{v}, \vec{w}, \theta, \varphi$

berechne $R_{out} d^3x d^3v$

Ausz. d. Teilch., die pro Zeiteinheit aus dem Phasenraumelem. herausgestreut werden

$$R_{out} d^3x d^3v = \underbrace{d^3x d^3v f(\vec{x}, \vec{v}, t)}_{\text{Ausz. d. Teilch. in } d^3x d^3v} \underbrace{\left(\int d^3w |\vec{v} - \vec{w}| f(\vec{x}, \vec{w}, t) \right)}_{\text{einfallende Teilchenfluss mit Relativgeschw. } \vec{v} - \vec{w}} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Ausz. d. Teilch. in $d^3x d^3v$

einfallende
Teilchenfluss mit
Relativgeschw. $\vec{v} - \vec{w}$

Integral über alle
einfallenden Geschwindigk.

Streuquerschnitt
im Schwerpunktsyst.
 $\Omega \Rightarrow (\theta, \varphi) \hat{=} \frac{\vec{v}_n'}{|\vec{v}_n'|}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(|\vec{v}_n'|, \theta)$$

$\int d\Omega \dots$ Integral über alle Endzustände,
erlaubt durch E-imp.-Erhaltung

berechne $R_{in} d^3x d^3v$

Ausz. von $d^3w' d^3v'$ in $d^3w d^3v$ gestreute
Teilchen

$\rightarrow$ vertausche $v' w' \leftrightarrow v w$

$$d^3x d^3v' f(\vec{x}, \vec{v}', t) \times d^3w' |\vec{v}' - \vec{w}'| f(\vec{x}, \vec{w}', t) \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(|\vec{v}_n'|, \theta)$$

-> $d^3v' d^3w'$ in $d^3v d^3w$ umschreiben

$$\text{es gilt } d^3v d^3w = d^3v_S d^3v_R$$

$$d^3v' d^3w' = d^3v_S d^3v_R'$$

$$\text{weil } |\vec{v}_R| = |\vec{v}_R'| \Rightarrow d^3v d^3w = d^3v' d^3w' \quad (1)$$

$$\text{-> verwende } \sigma(v, w \rightarrow v', w') = \sigma(v', w' \rightarrow v, w) \quad (2)$$

(Zeitumkehrinvarianz)

$$\text{-> } |\vec{v} - \vec{w}'| = 2|\vec{v}_R| = |\vec{v} - \vec{w}| \quad (3)$$

$\Rightarrow$

$$R_{in} d^3x d^3v = d^3x d^3v f(\vec{x}, \vec{v}, t) \int d^3w |\vec{v} - \vec{w}| f(\vec{x}, \vec{w}', t) \int d\Omega \frac{d\Omega}{d\Omega}$$

$$\text{Abb.: } f(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_v, \quad f(\vec{x}, \vec{v}', t) = f_v'$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_v + \frac{\vec{E}}{m} \vec{\nabla}_v f_v + \frac{\partial f_v}{\partial t} = \int d^3w |\vec{v} - \vec{w}| \int d\Omega \frac{d\Omega}{d\Omega} (f_v' f_w' - f_v f_w)$$

Integrodifferentialgleichung für $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$

betrachte $\int d^3v$, verwende (1), (2), (3)

$$\int d^3v [\text{rechte Seite}] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

elast. Stöße erhalten Teilchenzahl

im Allg., für Teilchenzahlverlekehende
Wechselwirkungen $\Rightarrow$ Quellterm für
Kontinuitätsgl.