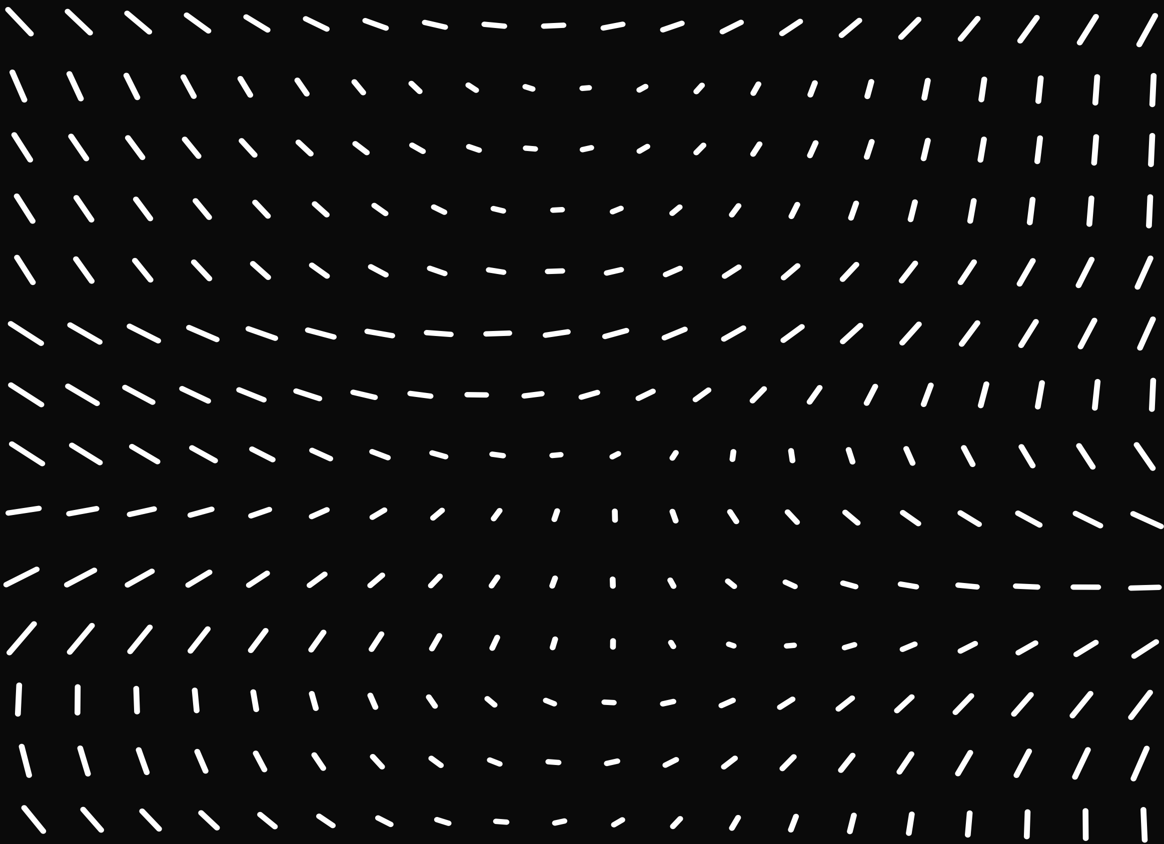
Statistische Physik Theo Fb

Th. Schwetz-Mangold (KIT SS2021)

VO 16: Boltzmanngleichung II, Relaxationszeitnäherung, Leitfähigkeit



Boltzmanngleichung: $f_v(\vec{x}, \vec{v}, t)$

$$\frac{d f_v}{dt} = \frac{\partial f_v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_v + \frac{\vec{F}}{m} \vec{\nabla}_v \cdot f_v = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Col}}$$

für elastische Stöße:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Col}} = \int d^3w \, |\vec{v} - \vec{w}| \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} \left(f_v' f_w' - f_v f_w\right)$$

-) Annäherung aus Gleichgewicht
-) Relaxationszeitnäherung
-) elektr. Leitfähigkeit

Annäherung aus Gleichgewicht

Def.: $H[f] = \int_V d^3x \int d^3v \; f \ln f = H(t)$

vgl.: H-Theorem (VO-14 WS): $H = \sum_r P_r \ln P_r$

es gilt:

$$\frac{dH}{dt} = \int d^3x\, d^3v\, \frac{\partial f}{\partial t}\,(1+\ln f)$$

$$= \int d^3x\, d^3v \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} (1+\ln f)$$

Terme $\vec{\nabla}_x f$ und $\vec{\nabla}_v f$ tragen nicht bei

Fluß durch $\partial V = 0$ $\qquad$ $f \to 0$ für $v \to \infty$

kann zeigen, dass: $\qquad$ (s. Grimus)

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3v \int d^3w\, |\vec{v}-\vec{w}| \int d\Omega\, \frac{d\sigma}{d\Omega} \times$$

$$\underbrace{(f_v' f_w' - f_v f_w)\left[\ln(f_v' f_w') - \ln(f_v f_w)\right]}_{\geq 0}$$

$$x = \frac{f_v' f_w'}{f_v f_w} \rightarrow \quad \propto \ln x\,(x-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \quad \hat{=} \text{ Entropiezunahme}$$

für H beschränkt:

für $t \to \infty$: Gleichgewichtszustand

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(t) \to f_0$$

Gleichgewichtsverteilung

mit: $f_{0v} f_{0w} = f_{0v}' f_{0w}'$ oder

$$\ln f_{0v} + \ln f_{0w} = \ln f_{0v}' + \ln f_{0w}'$$

elast. Stoß: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{v}' + \vec{w}'$

$$\vec{v}^2 + \vec{w}^2 = \vec{v}'^2 + \vec{w}'^2$$

Gleichgewichtsbedingung erfüllt für

$$\ln f_0(\vec{v}, \vec{x}) = A + \vec{B} \cdot \vec{v} + C \vec{v}^2$$
$$= D + C(\vec{v} - \vec{u})^2$$

i. Allg. können $A, \vec{B}, C$ [od. $D, C, \vec{u}$] von $\vec{x}$ abhängen

Bsp.: $\vec{u} = 0, \quad C = -\beta \frac{m}{2}$

$$D(\vec{x}) = D' - \beta U(\vec{x})$$

mit $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{x})$

$$\Rightarrow f_0(\vec{x}, \vec{v}) = \bar{\varrho} \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta\left(\frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{x})\right)}$$

$$\bar{\varrho} = \frac{N}{\int d^3x \, e^{-\beta U(\vec{x})}}$$

$$\Rightarrow \int d^3x \int d^3v \, f_0 = N, \quad \varrho(\vec{x}) = \int d^3v \, f_0 = \bar{\varrho} \, e^{-\beta U(\vec{x})}$$

es folg: $\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{kT}$

$\Rightarrow f_0(\vec{x}, \vec{v})$ ... Maxwell-Verteilung für klass. Teilchen im Potential $U(\vec{x})$

s. VO 1/2

f_0 in Boltzmanngl. einsetzen:

-) es gilt $\left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_{col} = 0$ $\qquad f_{0v} f_{0w} = f_{0v}' f_{0w}'$

-) linke Seite:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_0 + \frac{\vec{F}}{m} \nabla_v f_0 =$$

$$= \vec{v} \cdot f_0 (-\beta \underbrace{\vec{\nabla} U}_{-\vec{F}}) + \frac{\vec{F}}{m} f_0 (-\beta m \vec{v}) = 0$$

f_0 ist Lsg. d. Boltzmanngl.!

betrachte Fall: $A(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$, $C(\vec{x},t)$

$$\Rightarrow f_0^l(\vec{x},\vec{v},t) = \rho(\vec{x},t)\left[\frac{m}{2\pi k T(\vec{x},t)}\right]^{3/2} \times$$
$$e^{-\frac{m}{2}\frac{[\vec{v}-\vec{u}(\vec{x},t)]^2}{kT(\vec{x},t)}}$$

lokale Gleichgewichtsverteilung:

$T(\vec{x},t)$ ... lokale „Temperatur"

$\rho(\vec{x},t)$ ... lokale Dichte

$\vec{u}(\vec{x},t)$ ... lokale mittl. Geschwindigkeit

auch hier gilt $\left(\frac{\partial f_0^e}{\partial t}\right)_{col} = 0$

aber $\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_x + \frac{\vec{F}}{m}\vec{\nabla}_v\right] f_0^e \neq 0$ i. Allg.

$\Rightarrow f_0^e(\vec{x},\vec{v},t)$ <u>keine</u> Lsg d. BGl.!

Stoßterm nur „lokal" (Ann. molek. Chaos)

$\Rightarrow H[f]$ nur „lokale" Entropie

$\Rightarrow$ obwohl $\frac{dH[f]}{dt} = 0$ ist Entropie des Gesamtsyst. <u>nicht</u> maximal

Relaxationszeitnäherung

betrachte kleine Abweichungen von der lokalen Gleichgewichtsvert.:

$$f(\vec{x},\vec{v},t) = f_0^e(\vec{x},\vec{v},t) + \delta f(\vec{x},\vec{v},t)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = \left(\frac{\partial\, \delta f}{\partial t}\right)_{col} \approx -\frac{\delta f}{\tau_r}$$

τ_r ... Relaxationszeit

$\tau_r \gtrsim \tau_s$ brauche einige Stöße um ins Gleichgew. zu kommen

•) Fall $f_0^e \to f_0(\vec{v})$ unabh. v. $\vec{x}, t$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{d\,\delta f}{dt} = -\frac{\delta f}{\tau_r} \Rightarrow$$

$$\delta f(t) = \delta f(t=0)\, e^{-t/\tau_r}$$

$\Rightarrow$ Syst. strebt zum Gleichgewicht mit Zeitskala τ_r

$\Rightarrow$ f_0 unabh. von WW, aber WW ist verantwortl. für die Annäherung ans Gleichgew.

•) Fall $f_0^e(\vec{x}, \vec{v}, t)$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}_x + \frac{\vec{F}}{m}\vec{\nabla}_v\right]\left(f_0^e + \delta f\right) = -\frac{\delta f}{\tau_r}$$

$\Rightarrow$ lineare part. Differentialgl.!

Anwendung: Elektr. Leitfähigkeit

→ Teilchen mit Masse m und Ladung e
→ schwaches elektr. Feld $\vec{E}_a \parallel z$-Achse

betrachte f_0 für $\vec{E}_a = 0$

•) Fall: Ionen im Gas ⇒
Maxwell-Boltzmann-Vert.:

$$f_0(\vec{v}) = \rho \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta \frac{m\vec{v}^2}{2}} = f_0(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = \frac{m\vec{v}^2}{2}$$

•) Fall: Elektronen im Metall
⇒ entartetes Fermigas: FD

$$f_0(\vec{v}) \propto \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\varepsilon_F)}+1} \propto f_0(\varepsilon)$$

suche „neue" Gleichgewichtsvert. nach Einschalten von $\vec{E}_d$

$$f_0(\varepsilon) \longrightarrow f(\vec{v}) = f_0(\vec{v}) + \delta f(\vec{v})$$

$\delta f \ll f_0$, u.a. von t (neues Gleichgew.) von $\vec{x}$ (homogenes $\vec{E}$)

B-Gl.: $$\cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} + \cancel{\vec{v}\,\vec{\nabla}_x f} + \frac{\vec{F}}{m}\vec{\nabla}_v f = -\frac{\delta f}{\tau_r}$$

$$\vec{F} = e\vec{E}_d$$

$$\frac{eE_d}{m}\frac{\partial f}{\partial v_z} \approx \frac{eE_d}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_z} = eE_d v_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{\delta f}{\tau_r}$$

E_d schwach, vernachlässige $O(E_d\,\delta f)$

$$\Rightarrow \underline{\delta f = -eE_d v_z \tau_r \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}} \qquad (*)$$

elektr. Stromdichte in z-Richt.:

$$j_z = e \int d^3v \, f \, v_z = e \int d^3v \, \delta f \, v_z$$

f_0 symmetr. in $\vec{v}$, $\vec{j} = 0$ für $\vec{\mathcal{E}}_{el}$

$$\Rightarrow j_z = -e^2 \mathcal{E}_{el} \int d^3v \, \tau_r \, v_z^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

i. Allg. $\tau_r(v)$, hier $\tau_r(v) \approx \overline{\tau_r} \equiv \tau_r$

verwende $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{m v_z} \frac{\partial}{\partial v_z}$

$$\int dv_z \, v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = v_z f_0 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int dv_z \, f_0$$

$$\Rightarrow j_z = \frac{e^2 \varrho}{m} \tau_r \mathcal{E}_{el} = \sigma_{el} \mathcal{E}_{el}$$

ohmsche Gesetz

$\sigma_{el} = \frac{e^2 \varrho}{m} \tau_r$ ... el. Leitfähigkeit

Bem 1: Näherung $\delta f \ll f_0$

für f_0 ... MB-Vert.: $\qquad \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\beta f_0$

(*) $\Rightarrow \delta f = e \mathcal{E}_d v_z \tau_r \beta f_0$

$$\Rightarrow \frac{e \mathcal{E}_d v_z \tau_r}{kT} \ll 1$$

Energie durch $\mathcal{E}_d$, die ein Teilchen in τ_r gewinnt $\ll$ thermische Energie kT

Bem 2: $\sigma_{el} = \frac{e^2 \rho}{m} \tau_r$

gilt (in unserer) Näherung unabh. von der Form von $f_0(\vec{v})$

nur verwendet, dass $f_0(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ gilt für $f_0 = $ MB sowie FD!

Bem 3: σ_{el} ausgedr. durch mikroskopische Größe τ_r

Bsp.: Ionen im Gas:
τ_r bestimmt d. Stöße der Ionen mit Gasmolekülen

$$\frac{1}{\tau_r} \sim \frac{1}{\tau_s} \sim \rho_{Mol}\, \sigma_{St} \cdot \bar{v} \sim \rho_{Mol}\, \sigma_{St} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{el} \sim \frac{\rho_{Ion}}{\rho_{Mol}} \frac{e^2}{\sigma_{St}} \frac{1}{\sqrt{m\, kT}}$$