Moderne Theoretische Physik IIIb - Klausur 2, SS 2020

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Dr. Davide Valentinis

Klausur 2
13.10.2020

---

1. Kurzaufgaben (10 Punkte)

(a) [3 Punkte] Geben Sie die Van-der-Waals Gleichung zur Beschreibung realer Gase an. Was berücksichtigen die beiden Korrekturen zur idealen Gasgleichung?

(b) [3 Punkte] Skizzieren Sie die freie Energie, die Entropie und die spezifische Wärme als Funktion der Temperatur für ein System, das einen Phasenübergang erster Ordnung durchläuft.

(c) [2 Punkte] Welches Problem taucht z.B. im Isingmodell bei antiferromagnetischer Kopplung und einem Dreiecksgitter auf?

(d) [2 Punkte] Was wird bei der Molekularfeld-Näherung vernachlässigt?

2. XY-Modell (20 Punkte)

Das klassische XY-Modell ist ein Gittermodell, bei dem lokale magnetische Momente als zweikomponentige Einheitsvektoren $\mathbf{S}_i = (\cos\phi_i, \sin\phi_i)^T$ mit kontinuierlich varierenden Winkel $\phi_i \in [0, 2\pi]$ dargestellt werden. Das System mit externem Magnetfeld $\mathbf{B}$ wird dabei beschrieben durch den Hamiltonian

$$H = -J \sum_{\langle ij\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - g\mu_\mathrm{B} \sum_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_i \,. \tag{1}$$

Das Moment $\mathbf{S}_i$ ist am Ort i lokalisiert. Die Kopplung $J > 0$ benachbarter Momente ist homogen, $\langle ij\rangle$ bezeichnet die Summe über nächste Nachbarn und jedes Moment hat z nächste Nachbarn.

(a) [6 Punkte] Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonian (1) in Molekularfeld-Näherung vereinfacht zu

$$H_\mathrm{mf} \simeq -g\mu_\mathrm{B} \sum_i \mathbf{B}_\mathrm{eff} \cdot \mathbf{S}_i + E_0 \,. \tag{2}$$

und bestimmen Sie $\mathbf{B}_\mathrm{eff}(\langle\mathbf{S}\rangle)$ und E_0.

(b) [8 Punkte] Bestimmen Sie die Zustandssumme für H_mf und zeigen Sie, dass die mittlere Magnetisierung $m = |\mathbf{m}| = g\mu_\mathrm{B}|\langle\mathbf{S}_i\rangle|$ der Selbstkonsistenzgleichung

$$m = g\mu_B \frac{I_1\left(\beta z \bar{J} m + \beta g\mu_\mathrm{B}|\mathbf{B}|\right)}{I_0\left(\beta z \bar{J} m + \beta g\mu_\mathrm{B}|\mathbf{B}|\right)} \qquad \text{mit} \quad \bar{J} = \frac{J}{g\mu_\mathrm{B}} \tag{3}$$

genügen muss. Hier sind $I_0(x)$ und $I_1(x)$ die modifizierte Besselfunktionen[1].

Hinweis: Es kann angenommen werden, dass die Magnetisierung in Richtung des Magnetfelds zeigt.

(c) [6 Punkte] Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c, bei der dieses System auch ohne externes Feld eine Magnetisierung aufweist.
Bestimmen Sie den kritischen Exponenten β für die Magnetisierung am Phasenübergang.
Hinweis: $m(T, B = 0) \propto |T/T_c|^\beta$

---

[1]

$$n \in \mathbb{Z}: \; I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta e^{x\cos\theta}\cos n\theta, \quad I_1(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I_0(x) \quad \text{und} \quad I_0(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{4}$$

3. Ginzburg-Landau-Theorie (20 Punkte)

Ein System mit zwei gekoppelten Ordnungsparametern ϕ und χ sei durch eine Landau-Theorie mit der freien Energiedichte

$$f(\phi,\chi) = \frac{a_1(T)}{2}\phi^2 + \frac{a_2(T)}{2}\chi^2 + \frac{u_1}{4}\phi^4 + \frac{u_2}{4}\chi^4 + \frac{u_{12}}{2}\phi^2\chi^2 \tag{5}$$

mit $a_1(T) = a \cdot (T - T_1^*)$, $a_2(T) = a \cdot (T - T_2^*)$, $T_1^* > T_2^*$ und $a, u_1, u_2, u_{12} > 0$ beschrieben.

(a) [6 Punkte] Betrachten Sie zunächst den Fall ohne Kopplung $u_{12} = 0$:

(i) Bestimmen Sie die Ordnungsparameter der stabilen Phasen dieses Systems.

(ii) Welcher Ordnung sind die Phasenübergänge?

(iii) Bei welchen kritischen Temperaturen treten sie auf?

(iv) Skizzieren Sie den Betrag der Ordnungsparameter als Funktion der Temperatur. (In einem Graphen!).

(b) [14 Punkte] Betrachten Sie nun den Fall $u_{12} \neq 0$:

(i) Bestimmen Sie für $\phi = 0$ den Ordnungsparameter $\chi \neq 0$ und die kritische Temperatur. Bestimmen Sie für $\chi = 0$ den Ordnungsparameter $\phi \neq 0$ und die kritische Temperatur. Welche der beiden Fälle ist realisiert?

In einer stabilen Phase sei nun $\phi \neq 0$

(ii) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die freie Energiedichte

$$f(\chi) = -\frac{a_1^2}{4u_1} + \frac{1}{2u_1}(a_2u_1 - a_1u_{12})\chi^2 + \frac{1}{4u_1}(u_2u_1 - u_{12}^2)\chi^4 \tag{6}$$

das gekoppelte System beschreibt.

(iii) Bestimmen Sie für $0 < u_{12}^2 < u_1u_2$ die Ordnungsparameter der Phase mit $\chi \neq 0$ und $\phi \neq 0$. Bei welcher die kritische Temperatur tritt diese Phase auf?

(iv) Was passiert wenn $u_{12}^2 > u_1u_2$ gilt?

4. Boltzmann-Gleichung (10 Punkte)

Betrachten Sie die den Transport eines semiklassischen Elektronengases. Das System sei nur durch einen zeitabhängigen Temperaturgradienten $\nabla_\mathbf{r}T(\mathbf{r},t) = \nabla_\mathbf{r}T(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ getrieben. Die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{k},\mathbf{r},t)$ befinde sich nahe des lokalen Gleichgewichts

$$f^{(0)} = f^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{e^{\beta(\mathbf{r},t)(\varepsilon_\mathbf{k}-\mu)}+1}, \qquad \beta(\mathbf{r},t) = \frac{1}{k_\mathrm{B}T(\mathbf{r},t)}, \quad \varepsilon_\mathbf{k} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\,. \tag{7}$$

Das Stoßintegral $C[f]$ wird in Relaxationszeit-Näherung beschrieben durch

$$C[f] = \frac{\delta f}{\tau} \qquad \text{mit} \quad \delta f = f - f^{(0)}\,. \tag{8}$$

(a) Formulieren Sie die Boltzmann-Transport-Gleichung für dieses Problem. Bestimmen Sie den Wärmestrom $\mathbf{j}_Q(\mathbf{r},t)$.

Hinweis: Sie können annehmen, dass $\delta f(\mathbf{r},t) = \delta f(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t}$.

(b) Bestimmen Sie die thermische Leitfähigkeit $\kappa(\omega)$ bei tiefen Temperaturen ($k_BT \ll \mu$).

Hinweise:
Es gilt $j_Q(\mathbf{r},\omega) = -\kappa(\omega)\nabla_\mathbf{r}T(\mathbf{r},\omega)$.
$\int \mathrm{d}x \frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$