Mod. theor. Physik IIIb (Theo Fb), SS21: Klausur 1

---

17. Juni 2021 *Bearbeitungszeit*: 120 min
Gesamtpunkteanzahl: 96 Punkte

Diese Klausur besteht aus einer Formelsammlung und 5 Fragen.
Die Blätter sind beidseitig bedruckt.
Bitte geben Sie bei Herleitungen immer genügend Zwischenschritte an; um die volle Punkteanzahl zu erhalten muss der gesamte Rechenweg nachvollziehbar sein.

- Frage 1: 16 Punkte
- Frage 2: 14 Punkte
- Frage 3: 24 Punkte
- Frage 4: 12 Punkte
- Frage 5: 30 Punkte

Formelsammlung

- Integrale:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx\, x^{z-1}\, e^{-x}\,, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1}$$

- Boltzmanngleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_x f + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{col}} \tag{2}$$

Blatt bitte wenden!

Frage 1: Maxwellverteilung [16 Punkte]

Wir betrachten die Maxwellverteilung in der Form $f(\varepsilon)d\varepsilon = C\varepsilon^{1/2}\, e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon$, wobei ε die kinetische Teilchenenergie ist, C ist eine Normierungskonstante, und $\beta = 1/(kT)$.

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante C.

(b) Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie $\overline{\varepsilon}$.

(c) Berechnen sie die relative Schwankung der kinetischen Energie $\Delta\varepsilon/\overline{\varepsilon}$.

Hinweis: Drücken Sie die Ergebnisse mit Hilfe der Gamma-Funktion aus und verwenden Sie die Relationen zwischen den Gamma-Funktionen zur Vereinfachung, siehe Gl. 1.

Frage 2: Mikrokanonische Zustandssumme [14 Punkte]

Wir betrachten ein System mit 10 möglichen Zuständen, die die Teilchen einnehmen können. Alle 10 Zustände haben die gleiche Energie. Geben Sie nun die mikrokanonische Zustandssumme an, d.h., die Anzahl aller möglichen verschiedenen Mikrozustände, unter den folgenden Annahmen:

(a) Das System enthält nur ein Teilchen.

(b) Das System enthält 2 unterscheidbare klassische Teilchen.

(c) Das System enthält 2 ununterscheidbare Bosonen mit Spin null.

(d) Das System enthält 2 ununterscheidbare Fermionen. Wir nehmen an, dass alle Spins die gleiche Orientierung haben.

(e) Unter der Annahme, dass alle möglichen Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind, geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, 2 Teilchen in dem gleichen Zustand zu finden, für unterscheidbare klassische Teilchen, für ununterscheidbare Bosonen und für ununterscheidbare Fermionen mit den gleichen Annahmen wie unter (c) und (d).

Frage 3: Zwei-Teilchen Isingmodell [24 Punkte]

Wir betrachten ein System bestehend aus zwei Teilchen mit den Spins s_1 und s_2, wobei $s_{1,2} = \pm 1$, und der Wechselwirkungsenergie

$$E = -\varepsilon\, s_1 s_2 \ ,$$

wobei ε eine Konstante ist, die die Wechselwirkungsstärke angibt. Die beiden Teilchen seien lokalisiert, d.h., unterscheidbar.

(a) Geben Sie alle möglichen Zustände des Systems an, sowie die entsprechenden Boltzmannfaktoren, d.h. $e^{-\beta E_r}$, wobei E_r die Energie des Zustands r ist.

(b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.

(c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, die beiden Spins mit paralleler Ausrichtung und mit antiparalleler Ausrichtung zu finden. Skizzieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten als Funktion von kT/ε.

(d) Berechnen Sie die mittlere Energie des Systems und skizzieren Sie sie als Funktion von kT/ε.

(e) Ab welcher Temperatur is es wahrscheinlicher beide Spins nach oben $(s_1 = s_2 = 1)$ zu finden, als einen mit Ausrichtung nach oben und den anderen nach unten?

Frage 4: Boltzmanngleichung [12 Punkte]

Wir betrachten die Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ für ein System aus N klassischen, nicht-relativistischen Teilchen in einem Volumen V. Die Normierung ist

$$\int_V d^3x \int d^3v f(\vec{x}, \vec{v}, t) = N \, . \tag{3}$$

(a) Definieren Sie mit Hilfe von $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ die Teilchendichte $\rho(\vec{x}, t)$ und die Teilchenstromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$.

(b) Betrachten Sie nun die stoßfreie Boltzmangleichung, mit $(\partial f/\partial t)_{\rm col} = 0$, mit einer konservativen (d.h. geschindigkeitsunabhängigen) Kraft. Leiten Sie damit die Kontinuitätsgleichung für $\rho(\vec{x}, t)$ und $\vec{j}(\vec{x}, t)$ her.

Blatt bitte wenden!

Frage 5: Fermigas im Magnetfeld [30 Punkte]

Wir betrachten ein Quantengas aus Fermionen mit Spin 1/2 (z.B. Elektronen). Vorerst liege kein äußeres Magentfeld vor.

(a) Geben Sie mit Hilfe der mittleren Besetzungszahl für die Fermi-Dirac Verteilung den Ausdruck für die Teilchendichte N/V an, unter der Annahme einer allgemeinen Zustandsdichte $g(\epsilon)$, für beliebige Temperatur T. Leiten Sie dann einen Ausdruck für die Zustandsdichte $g_{\rm id}(\epsilon)$ für den Fall $\epsilon = p^2/(2m)$ her. [8 Punkte]

(b) Wie ist die Definition der Fermienergie ϵ_F? Leiten Sie für den Fall $\epsilon = p^2/(2m)$ folgende Formel her:

$$\epsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} . \tag{4}$$

[6 Punkte]

(c) Nun liege ein äußeres Magentfeld B vor. Die Einteilchenenergien werden zu

$$\epsilon_\pm = \epsilon \mp \mu_B B \,, \tag{5}$$

wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist, und das obere Vorzeichen gilt, wenn das magnetische Moment parallel zum Feld ist. Wir betrachten nun den Fall $\mu_B B \ll \epsilon_F$ und $kT \ll \epsilon_F$ (d.h., den Grenzfall $T \approx 0$).

Berechnen Sie die Anzahl der parallel $(+)$ und der antiparallel $(-)$ eingestellten magnetischen Momente,

$$N_\pm = \sum_{\vec{p}} \overline{n_\pm(\epsilon)} \tag{6}$$

wobei eine allgemeine Zustandsdichte $g(\epsilon)$ angenommen werden soll. [10 Punkte]

Hinweise: Verwenden Sie, dass für $T \approx 0$ die FD Verteilung die Form einer Stufenfunktion annimmt. Verwenden Sie $\mu_B B \ll \epsilon_F$ und geben Sie nur den führenden Term in der kleinen Größe $\mu_B B$ an. Drücken Sie das Ergebnis für $N_\pm$ mit Hilfe der Gesamtteilchenzahl N und $g(\epsilon_F)$ aus.

(d) Bestimmen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Punkt (c) die Magnetisierung $M(B) = \mu_B(N_+ - N_-)/V$. Geben Sie das Ergebnis zuerst für eine allgemeine Zustandsdichte $g(\epsilon)$ an, und zeigen Sie dann dass für den Spezialfall $g_{\rm id}(\epsilon)$ gilt

$$M(B) = \frac{3}{2} \frac{N}{V} \frac{\mu_B^2 B}{\epsilon_F} . \tag{7}$$

[6 Punkte]