Mod. theor. Physik IIIb (Theo Fb), SS21: Klausur 2

23. Juli 2021

Bearbeitungszeit: 120 min
Gesamtpunkteanzahl: 100 Punkte

Diese Klausur besteht aus einer Formelsammlung und 4 Fragen.
Die Blätter sind beidseitig bedruckt.
Bitte geben Sie bei Herleitungen immer genügend Zwischenschritte an; um die volle Punkteanzahl zu erhalten muss der gesamte Rechenweg nachvollziehbar sein.

- Frage 1: 20 Punkte
- Frage 2: 24 Punkte
- Frage 3: 32 Punkte
- Frage 4: 24 Punkte

Formelsammlung

- Boltzmanngleichung für elastische Stöße: $f_v \equiv f(\vec{x}, \vec{v}, t)$,

$$\frac{\partial f_v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_v + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v f_v = \int d^3w |\vec{v} - \vec{w}| \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(f_{v'} f_{w'} - f_v f_w) \tag{1}$$

- Kanonisches Ensemble:

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r}, \qquad P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{Z}, \tag{2}$$

$$F = -kT \ln Z, \qquad S(T,V,N) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} \tag{3}$$

- Integrale:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2), \tag{4}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\zeta(5/2), \tag{5}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2\zeta(3), \tag{6}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}, \tag{7}$$

$$\int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \tag{8}$$

Blatt bitte wenden!

Frage 1: Einatomiges ideales Gas

[20 Punkte]

Wir betrachten ein klassisches einatomiges ideales Gas im Volumen V.

(a) Geben Sie die ein-Teilchen-Hamiltonfunktion an, und zeigen Sie, dass für die ein-Teilchen kanonische Zustandssumme Z_1 gilt $Z_1 = V/\lambda^3$, wobei $\lambda = \hbar\sqrt{2\pi/(mkT)}$ die thermischen Wellenlänge ist.

(b) Geben Sie mit Hilfe von Z_1 die gesamte kanonische Zustandssumme Z für N Teilchen an, mit $N \gg 1$. (Berücksichtigen Sie, dass die Teilchen ununterscheidbar sind.) Leiten Sie aus Z die Sackur-Tetrode-Gleichung her, also die Entropie $S(T, V, N)$.

(c) Leiten Sie mit Hilfe von Z_1 die ein-Teilchen-Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ her (d.h., die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung).

(d) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass Ihr Ergebnis für $f(v)$ aus Punkt (c) die Boltzmanngleichung für elastische Stöße erfüllt (mit der externen Kraft $\vec{F} = 0$), in dem Sie zeigen, dass sowohl die rechte als auch die linke Seite der Boltzmanngleichung null ist.

Frage 2: Ideales Bosegas

[24 Punkte]

Wir betrachten ein ideales Gas aus Bosonen mit Spin null.

(a) Geben Sie mit Hilfe der mittleren Besetzungszahlen die allgemeinen Ausdrücke für die Teilchenzahl $N(V, T, \mu)$ und die Energie $E(V, T, \mu)$ an, wobei Teilenenergie ϵ und Impuls p als kontinuierlich betrachtet werden sollen.

(b) Wie ist die kritische Temperatur T_c definiert, bei der Bose-Einstein-Kondensation auftritt?

(c) Wir betrachten nun nicht-relativistische Teilchen mit $\epsilon = p^2/(2m)$. Verwenden Sie die Antworten aus Punkt (a) und (b) um zu zeigen, dass

$$kT_c = \frac{2\pi}{\zeta(3/2)^{2/3}} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} . \qquad (9)$$

(d) Berechnen Sie nun für diesen Fall die Kondensationskurve im $P-v$ Diagram ($v = V/N$). Skizzieren Sie die Kurve. *Hinweis:* Verwenden Sie die Beziehung $P = 2E/(3V)$.

Hinweis: Sie benötigen die Integrale aus Gln. (4) and (5).

Frage 3: Massive Photonen

[32 Punkte]

Betrachten Sie ein Photongas im Volumen V mit masselosen Photonen.

(a) Geben Sie die mittleren Besetzungszahlen an.

(b) Berechnen Sie damit die Teilchendichte $\rho = N/V$ und Energiedichte E/V als Funktion der Temperatur im Kontinuumlimes.

(c) Berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Punkt (b) die Entropiedichte (S/V) und die Entropie pro Teilchen (S/N). *Hinweis:* Verwenden Sie dafür die Wärmekapazität:

$$C_V(T) = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V . \tag{10}$$

Nun betrachten wir den hypothetischen Fall, dass das Photon eine endliche Masse m habe, und verwenden die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon^2 = c^2p^2 + m^2c^4$.

(d) Geben Sie einen Ausdruck für die Teilchendichte ρ an. *Hinweis:* Verwenden Sie den Impuls p als Integrationsvariable; das Integral hat keine analytische Lösung und soll nicht gelöst werden.

(e) Zeigen Sie, dass man im Limes $kT \gg mc^2$ das Ergebnis für masselose Photonen erhält.

(f) Nun betrachten wir den Fall $kT \ll mc^2$. In dieser Näherung kann das Integral aus Punkt (d) näherungsweise gelöst werden. Berechnen Sie $\rho(T)$. Was erhält man im Limes $T \to 0$?

Hinweis: Verwenden Sie $\epsilon \approx mc^2 + p^2/(2m)$. Argumentieren Sie, warum man diese Näherung im Integral verwenden darf, wenn $kT \ll mc^2$.

Frage 4: Quantenstatistik versus klassische Wahrscheinlichkeiten [24 Punkte]

Gegeben sei ein System in dem es 3 ein-Teilchenzustände gibt, mit den Energien $\epsilon = nE_0$ mit $n = 1, 2, 3$ und E_0 ist eine Konstante. Alle 3 Niveaus haben a-priori die gleiche Wahrscheinlichkeit besetzt zu sein. Wir betrachten die drei Fälle (i) unterscheidbare klassische Teilchen, (ii) ununterscheidbare Bosonen mit Spin null, (iii) ununterscheidbare Fermionen mit Spin 1/2, wobei wir annehmen, dass alle Spins gleich ausgerichtet sind. Beantworten Sie die folgenden Fragen immer für diese drei Fälle.
Das System bestehe aus zwei Teilchen.

(a) Geben Sie die Gesamtanzahl aller möglichen Mikrozustände an.

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtenergie des Systems aus zwei Teilchen gleich $4E_0$ ist?

Für die folgenden Teilaufgaben (c) und (d) koppeln wir das System an ein Wärmebad mit Temperatur T, mit dem es im Gleichgewicht sei. Dann werden im Allgemeinen die Zustände nichtmehr gleichwahrscheinlich besetzt sein.

(c) Berechnen Sie für die drei Fälle $(i), (ii), (iii)$ die kanonische Zustandsumme. Geben Sie als Funktion der Temperatur die Wahrscheinlichkeit an, dass die Gesamtenergie des Systems gleich $4E_0$ ist. Geben Sie jeweils die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \to \infty$ an. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit als Funktion der dimensionslosen Größe $x = kT/E_0$. Ist bei endlicher Temperatur die Wahrscheinlichkeit für $4E_0$ für Fermionen oder für Bosonen größer?

(d) Berechnen Sie nur für den fermionischen Fall die mittlere Energie des Systems als Funktion der Temperatur, und geben Sie die Grenzfälle für $T \to 0$ und $T \to \infty$ an.